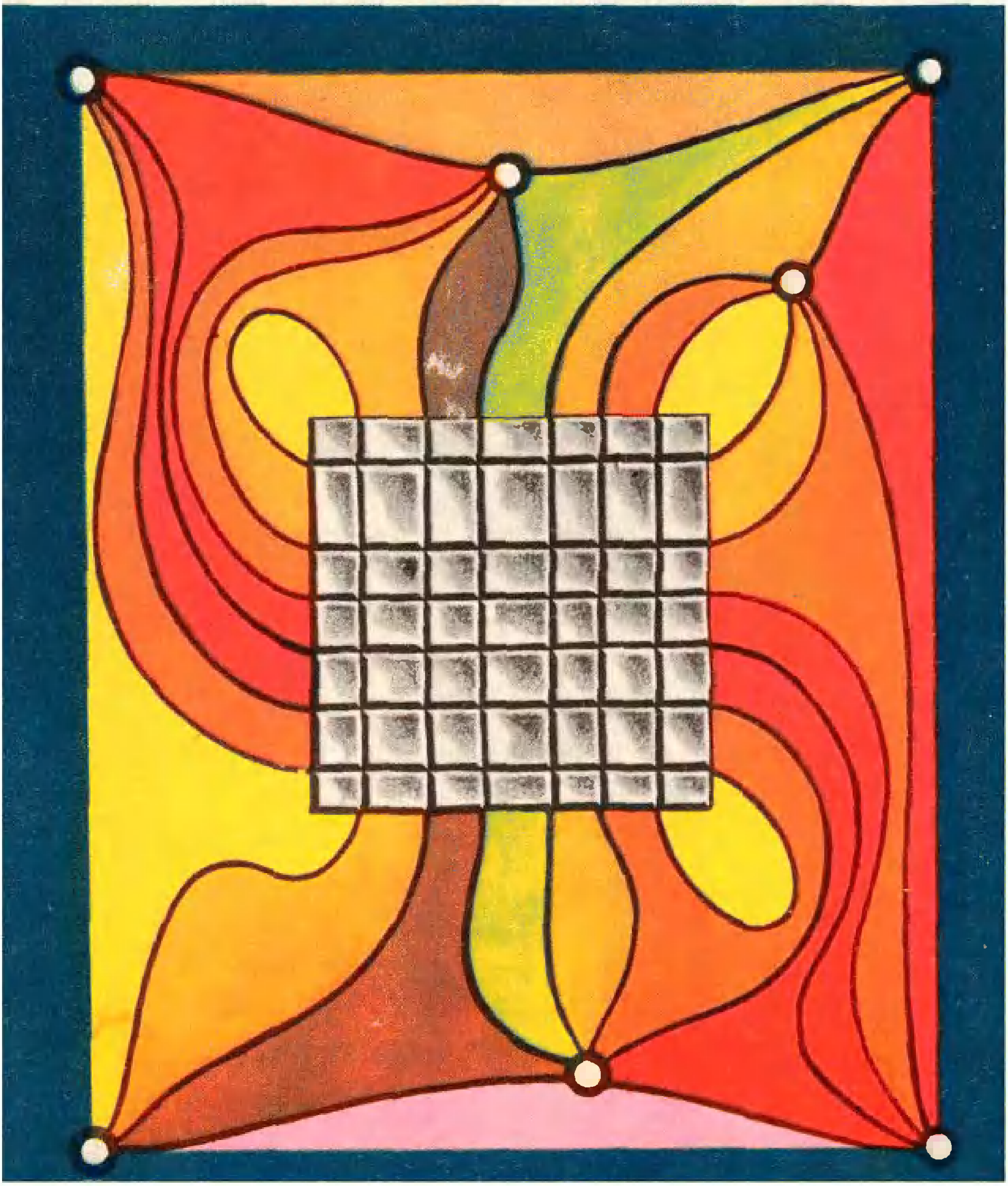
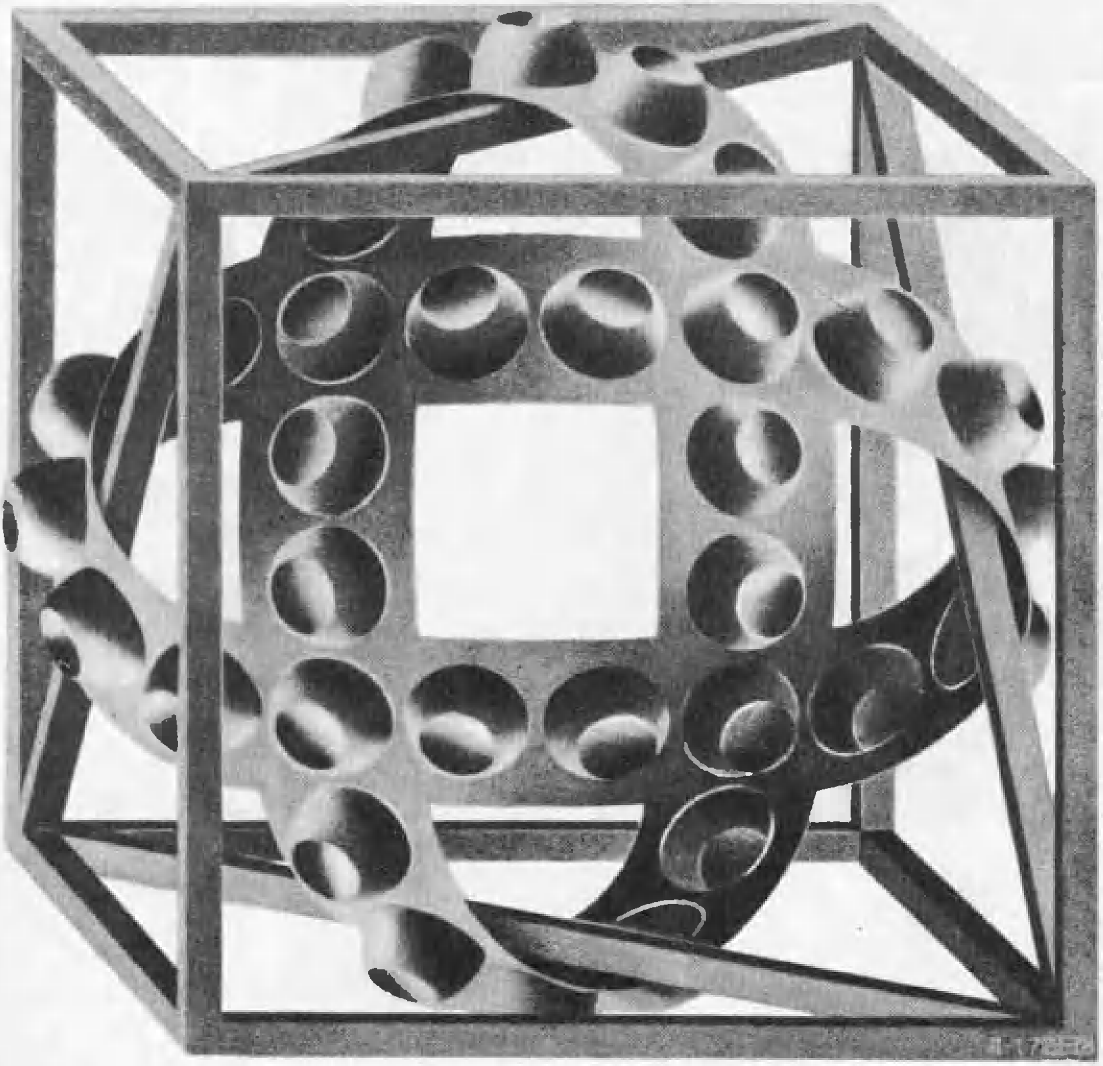
КВАНТ

10
1978

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





ЧТО ВЫПУКЛО, А ЧТО ВОГНУТО?

В некоторых случаях определить это легко, а в некоторых невозможно. Глаз по-прежнему будет видеть то «горку», то «впадинку». На этом рисунке замечательному голландскому художнику М. Эшеру удалось «поймать» эти неустойчивости.

Основан в 1970 году

Квант

10
1978

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице
обложки
решена задача
о попарном соединении
непересекающимися
тропинками
семи точек
на поверхности...
бублика.
Подробности
см. на с. 60.

150 лет со дня рождения Л. Н. Толстого

Художественное наследие Л. Н. Толстого давно вошло в сокровищницу мировой культуры. Шедевры Л. Н. Толстого были и остаются не только непревзойденными описаниями русской жизни, но и глубокими философскими сочинениями, в которых отражены вся многогранность и сложность человека. Толстой-гуманист не предписывает человеку никаких отвлеченных правил, кроме обязательного для всех правила оставаться человеком в любых обстоятельствах, сообразуясь с ними, но не подчиняясь им. По мнению Толстого, без приобщения к общечеловеческому труду, не будь которого люди и дня не могли бы прожить, даже самый гениальный художник или ученый не смог бы считать себя равным всем людям. А без этого, по Толстому, невозможно никакое истинное творчество.

Художественное творчество Л. Н. Толстого хорошо знакомо. Гораздо меньше известны его педагогические сочинения. Нашим читателям, несомненно, будет интересно узнать, что Л. Н. Толстой много времени и внимания уделял вопросам преподавания в школе и, в частности, методике преподавания арифметики. Ему принадлежит учебник «Арифметика», изданный в 1874 году и опиравшийся на его личный опыт многолетнего преподавания в Яснополянской школе. В этой книге, существенно отличавшейся по содержанию от учебников своего времени, нашли отражение оригинальные воззрения

Л. Н. Толстого на преподавание арифметики. Многие идеи Л. Н. Толстого явно перекликаются с современными взглядами на преподавание математики в школе. Вот только один пример: «Уравнение, — писал Л. Н. Толстой, — следовательно, алгебру я начинаю вместе с первыми действиями...» (Л. Н. Толстой. Педагогические сочинения. М., 1953). Кажется, что это сказано не сто лет назад, а сегодня, о новых учебниках для начальных классов.

Л. Н. Толстой всю жизнь любил интересные, оригинальные задачи, высоко ценил простые и прозрачные решения. Напомним читателям одну из его любимых задач — «задачу о косцах», — которая решается нехитрыми рассуждениями без составления уравнений.

«Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; вторая же половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный на другой день одним косцом за один день работы. Сколько косцов было в артели?

В «Войне и мире» многие страницы посвящены раздумьям писателя о жизни, о Родине, о бытии, о человеке. И чем больше перечитываешь это произведение, тем больше находишь в нем нового, глубокого, неожиданного, ранее скрытого.

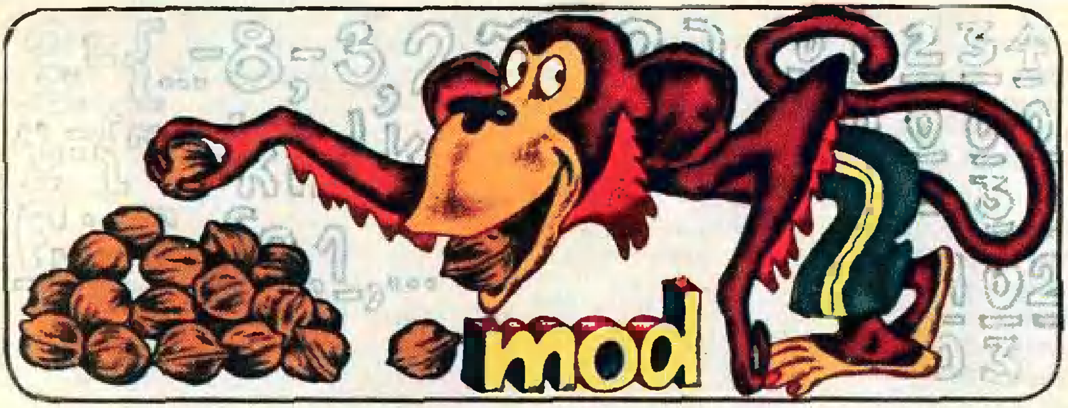
Ниже мы воспроизводим отрывок из романа, где речь идет об одном из важнейших вопросов философии естествознания, тесно примыкающем к тематике нашего журнала.

Для человеческого ума непонятна абсолютная непрерывность движения. Человеку становятся понятны законы какого бы то ни было движения только тогда, когда он рассматривает произвольно взятые единицы этого движения. Но вместе с тем из этого-то произвольного деления непрерывного движения на прерывные единицы проистекает большая часть человеческих заблуждений.

Известен так называемый софизм древних, состоящий в том, что Ахиллес никогда не догонит впереди идущую черепаху, несмотря на то, что Ахиллес идет в десять раз скорее черепахи: как только Ахиллес пройдет пространство, отделяющее его от черепахи, черепаха пройдет впереди его одну десятую этого пространства; Ахиллес пройдет эту десятую, черепаха пройдет одну сотую и т. д. до бесконечности. Задача эта представлялась древним неразрешимою. Бессмысленность решения (что Ахиллес никогда не догонит черепаху) вытекала из того только, что произвольно были допущены прерывные единицы движения, тогда как движение и Ахиллеса и черепахи совершалось непрерывно.

Принимая все более и более мелкие единицы движения, мы только приближаемся к решению вопроса, но никогда не достигаем его. Только допустив бесконечно-малую величину и восходящую от нее прогрессию до одной десятой и взяв сумму этой геометрической прогрессии, мы достигаем решения вопроса. Новая отрасль математики, достигнув искусства обращаться с бесконечно-малыми величинами, и в других более сложных вопросах движения дает теперь ответы на вопросы, казавшиеся неразрешимыми.

Эта новая, неизвестная древним, отрасль математики, при рассмотрении вопросов движения, допуская бесконечно-малые величины, то есть такие, при которых восстановляется главное условие движений (абсолютная непрерывность), тем самым исправляет ту неизбежную ошибку, которую ум человеческий не может не делать, рассматривая вместо непрерывного движения отдельные единицы движения.



Н. Виленкин

Сравнения и классы вычетов

Многим любителям математики известна следующая задача:

Обезьяна и орехи

Пять путешественников остановились на ночлег. Они везли с собой мешок орехов и обезьяну. Ночью один из них проснулся, подошел к мешку и разделил орехи на 5 равных частей, причем один орех остался лишним. Он отдал обезьяне лишний орех, съел свою долю и снова лег спать. Потом проснулся второй путешественник и, не зная о поступке первого, проделал то же самое. Потом это же сделали по очереди остальные три путешественника. Когда утром оставшиеся орехи разделили на 5 равных частей, снова остался один орех для обезьяны. Сколько было орехов?

Вся трудность этой задачи в лишних орехах, без них ответом послужило бы любое число, которое можно шесть раз делить без остатка на 5, то есть любое число, кратное $5^6 = 15625$. А из-за того, что каждый раз деление происходило с остатком, задачу решить куда труднее. Замечательное решение придумал в студенческие годы знаменитый английский физик Дирак. Он решил найти число орехов, которое бы ... не менялось при описанной операции (делении на пять частей с выделением ореха обезьяне и поедании одной части). Читатель, несомненно, скажет, что такого числа орехов быть не может — ясно, что после этой операции оно должно уменьшиться. Но все дело в том, что Дирак не ограничивал себя натуральными числами. А тогда ему осталось решить уравнение $\frac{4}{5}(x-1)=x$. Корнем этого уравнения является число -4. Поэтому число -4 могло бы быть решением нашей задачи, но по ее смыслу, конечно, не годится. Зато теперь ясно, как получить положительный ответ: надо к числу -4, найденному Дираком, прибавить 5^6. Проверьте, что ответ 15 621 удовлетворяет условию задачи. Впрочем, ему удовлетворяет и каждое число вида $-4 + 5^6 \cdot k$, где k — любое натуральное число.

Что такое сравнимые числа

Если отвлечься от требования положительности решения, то любое число вида $-4 + 5^6 \cdot k$, где k — целое, является решением задачи про орехи и обезьяну. Эти числа образуют «двустороннюю арифметическую прогрессию» с разностью 5^6, простирающуюся в обе стороны. У них есть одно общее свойство — при делении на 5^6 все они дают один и тот же остаток 15 621.

Про такие числа в математике говорят, что они *сравнимы друг с другом по модулю**) 15 625.

В общем виде понятие сравнимости по некоторому модулю $m \in \mathbf{N}$ можно определить двумя равносильными способами:

Определение 1. *Целые числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если их разность делится без остатка на m.*

Определение 1'. *Целые числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если их остатки при делении на m одинаковы* *).

Если числа a и b сравнимы друг с другом по модулю m, то пишут так:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Например, $16 \equiv 30 \pmod{7}$, так как разность $16 - 30 = -14$ делится на 7, а $72 \not\equiv 45 \pmod{8}$, так как $72 - 45 = 27$ не делится на 8.

Арифметика остатков

Все числа, сравнимые с числом 2 по модулю 5, одинаково ведут себя при делении на 5 — они дают остаток 2. Объединим эти числа в одно множество и назовем его *классом вычетов по модулю* 5. Обозначим этот класс той же цифрой 2, только, чтобы отличить его от числа 2, будем писать ее так: $\overline{2}$. Значит, $\overline{2}$—не число, а бесконечная совокупность чисел:

$$\overline{2} = \{\ldots -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$$

Так же определяется класс вычетов по любому модулю m. При делении на m могут получиться m различных остатков: $0, 1, 2, \ldots, m-1$. Каждому из них соответствует свой класс вычетов. Остатку r соответствует класс вычетов $\overline{r}$, состоящий из чисел вида $r + km$, где k — целое число:

$$\overline{r} = \{r + km \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

Все множество $\mathbf{Z}$ целых чисел распадается на m классов вычетов по модулю m. Множество всех этих классов обозначают через F_m: $F_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$. При изучении вопросов, касающихся делимости на m, лучше иметь дело с конечным множеством F_m, чем с бесконечным множеством $\mathbf{Z}$.

Чтобы решать задачи про делимость, надо уметь выполнять над классами вычетов арифметические операции. Начнем со сложения. Оно определяется очень просто — в каждом из слагаемых (напомним, что класс вычетов есть бесконечное множество целых чисел) берут по представителю и складывают их, а потом смотрят, в какой класс вычетов попала сумма. Его и называют *суммой* данных *классов*. Например, сложим классы вычетов $\overline{4}$ и $\overline{5}$ по модулю 6. Для этого выберем в них по представителю. Чтобы долго не думать, возьмем сами остатки $\overline{4}$ и $\overline{5}$, давшие названия слагаемым классам. Их сумма равна 9. Но $9 \equiv 3 \pmod{6}$ и потому $\overline{4} + \overline{5} = \overline{3}$. Если те же классы берутся не в F_6, а в F_8, то сумма получится ниая: $\overline{4} + \overline{5} = \overline{1}$. А в F_9 $\overline{4} + \overline{5} = \overline{0}$.

Чтобы покончить с вопросом о сложении классов вычетов, надо еще доказать, что при выборе иных представителей сумма не изменится. Это следует из такой теоремы:

Теорема 1. *Если $a \equiv a_1 \pmod{m}$ и $b \equiv b_1 \pmod{m}$, то $a + b \equiv a_1 + b_1 \pmod{m}$.*

Доказательство. Так как $a \equiv a_1 \pmod{m}$, $a = a_1 + km$, где $k \in \mathbf{Z}$, а так как $b \equiv b_1 \pmod{m}$, $b = b_1 + lm$, где $l \in \mathbf{Z}$. Поэтому $a + b = a_1 + b_1 + (k + l)\,m$, где $k + l \in \mathbf{Z}$, и $a + b \equiv a_1 + b_1 \pmod{m}$.

Мы свели сложение классов вычетов к сложению чисел. Поэтому сложение классов вычетов коммутативно и ассоциативно, то есть $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ и $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$, прибавление класса $\overline{0}$ не меняет класса вычетов, то есть $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$, и т. д.

Вычитание и умножение классов вычетов определяются точно так же — в классе выбирают по представителю и выполняют операции над ними. И здесь результат не зависит от выбо-

---

*) Слово «модуль» происходит от латинского modulus (мера).

**) *Остатком* от деления целого числа a на натуральное число m называется такое число r, что $a = mq + r$ и $0 \leqslant r < m$.

ра представителей (докажите это сами). Более того, справедливо следующее весьма общее утверждение:

Если $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и $a \equiv a_1 \pmod m$, то $P(a) \equiv P(a_1) \pmod m$. Постарайтесь доказать это самостоятельно.

Свойства операций вычитания и умножения классов вычетов тоже очень похожи на свойства этих операций для целых чисел (за одним исключением; о нем — ниже).

Задачи на делимость

Поскольку классы вычетов по модулю m тесно связаны с остатками от деления на m, почти все задачи, в которых речь идет о делимости чисел, удобно решать с помощью сравнений.

Пример 1. *Найдем остаток от деления 212^{1978} на 7.*

Так как при делении 212 на 7 получается остаток 2, $212 \equiv 2 \pmod 7$. Отсюда следует, что $212^{1978} \equiv 2^{1978} \pmod 7$. Заметим теперь, что $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$. Но $1978 = 659 \times 3 + 1$. Значит, из $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ следует, что $2^{1978} = (2^3)^{659} \cdot 2 \equiv 1^{659} \cdot 2 = 2 \pmod 7$. Поэтому при делении 212^{1978} на 7 получится остаток 2.

Пример 2. *Выведем признак делимости на 9.*

Так как $10 \equiv 1 \pmod 9$, для любого k имеем $10^k \equiv 1 \pmod 9$. Но тогда

$$a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_n \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_n \pmod 9.$$

Это значит, что числа $N = a_0 \cdot 10^n + \ldots + a_n$ и $M = a_0 + \ldots + a_n$ имеют одинаковые остатки при делении на 9. В частности, *N делится на 9 в том и только в том случае, когда на 9 делится число M* (сумма цифр числа N).

Пример 3. *Докажем, что квадрат любого натурального числа либо делится на 9, либо дает при делении на 3 остаток 1.*

В самом деле, если $x \equiv 0 \pmod 3$, то x^2 делится на 9. Если же $x \equiv 1 \pmod 3$ или $x \equiv 2 \pmod 3$, то $x^2 \equiv 1 \pmod 3$, так как $1^2 = 1$ и $2^2 = 4 \equiv 1 \pmod 3$.

Пример 4. *Найдем последнюю цифру числа 7^{7^7}.*

Нам надо найти остаток от деления числа 7^{7^7} на 10. Но $7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{10}$, и потому $7^4 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{10}$. Найдем остаток от деления показателя 7^7 на 4. Так как $7 \equiv -1 \pmod 4$, $7^7 \equiv (-1)^7 \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$, и потому $7^7 = 4m + 3$. Следовательно, $7^{7^7} = (7^4)^m \cdot 7^3 \equiv 7^3 \equiv (-3)^3 \equiv -27 \equiv 3 \pmod{10}$. Это значит, что у чисел 7^{7^7} и 3 одинакова последняя цифра, то есть 7^{7^7} кончается на 3.

Деление классов вычетов

Разделить класс вычетов $\bar b$ на класс вычетов $\bar a$ — значит найти такой класс вычетов $\bar x$, что $\bar a \bar x = \bar b$. Для целых чисел задача деления разрешима не всегда, но уж если она решается, то единственным образом. Это связано с тем, что произведение двух целых чисел равно нулю лишь в случае, когда хоть один из множителей равен нулю. Но в F_m дело обстоит не так. Взглянув на таблицу умножения для F_6, замечаем, что нули стоят в ней не только в первой строке и первом столбце (там, где один из множителей равен нулю).

Нулю равны и произведения $\bar 2 \cdot \bar 3$, $\bar 3 \cdot \bar 4$, хотя множители отличны от нуля. Как говорят, в F_6 есть делители нуля (класс вычетов $\bar a$ называется *делителем нуля*, если он отличен от $\bar 0$, но существует такой класс $\bar b \neq \bar 0$, что $\bar a \cdot \bar b = \bar 0$). В F_6 делителями нуля оказались классы $\bar 2$, $\bar 3$, $\bar 4$. Числа 2, 3, 4 имеют общее свойство — они не являются взаимно простыми с модулем 6. Это наводит на мысль о справедливости следующей теоремы:

Таблица умножения в F_6

	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$
$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$
$\bar 1$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$
$\bar 2$	$\bar 0$	$\bar 2$	$\bar 4$	$\bar 0$	$\bar 2$	$\bar 4$
$\bar 3$	$\bar 0$	$\bar 3$	$\bar 0$	$\bar 3$	$\bar 0$	$\bar 3$
$\bar 4$	$\bar 0$	$\bar 4$	$\bar 2$	$\bar 0$	$\bar 4$	$\bar 2$
$\bar 5$	$\bar 0$	$\bar 5$	$\bar 4$	$\bar 3$	$\bar 2$	$\bar 1$

Теорема 2. *Класс вычетов $\bar a$ в F_m не является делителем нуля в том и только в том случае, когда a и m взаимно просты.*

Доказательство. Пусть a и m взаимно просты. Если $\bar a \cdot \bar b = \bar 0$, то число ab делится на m. Но, в силу взаимной простоты a и m, это может быть лишь в случае, когда b делится на m, то есть $\bar b = \bar 0$. Это и значит, что $\overline{ab} = \bar 0$ лишь при $\bar b = \bar 0$, то есть что $\bar a$ не является делителем нуля.

Предположим теперь, что наибольший общий делитель чисел a и m отличен от 1, $a = a_1 d$, $m = m_1 d$, $d > 1$. Тогда число $m_1 < m$ — целое, причем отлично от m, и потому $\overline{m_1} \neq \bar 0$. Но $am_1 = a_1 d m_1 = a_1 m$, то есть $\overline{am_1} = \bar 0$. Значит, $\bar a$ — делитель нуля.

Если число a взаимно просто с модулем m, то все числа из класса вычетов $\bar a$ взаимно просты с m. В этом случае говорят, что *класс $\bar a$ взаимно прост с m*.

Из теоремы 2 вытекает важное

Следствие 1. *Если класс вычетов $\bar a$ взаимно прост с m, то в F_m можно однозначно делить на $\bar a$, то есть для любого $\bar b \in F_m$ уравнение $\bar a \bar x = \bar b$ имеет одно и только одно решение.*

Сначала докажем, что это уравнение не может иметь различных решений. Если $\bar a \bar x_1 = \bar b$ и $\bar a \bar x_2 = b$, то $\bar a\,(\bar x_1 - \bar x_2) = \bar 0$, а так как $\bar a$ не делитель нуля, то $\bar x_1 - \bar x_2 = \bar 0$, то есть $\bar x_1 = \bar x_2$. Значит, решение может быть лишь одно.

Осталось показать, что решение существует.

Мы только что доказали, что среди классов вычетов $\bar a \cdot \bar 0, \bar a \cdot \bar 1, \ldots, \bar a\,(\overline{m-1})$ нет одинаковых. Значит, это те же классы $\bar 0, \bar 1, \ldots, \overline{m-1}$, только, возможно, взятые в ином порядке. А тогда для любого класса $\bar b$ найдется такой класс x, что $\bar a \cdot \bar x = \bar b$.

Подтверждением доказанного следствия может служить таблица умножения по модулю 6 — из нее видно, что только в строках для классов $\bar 1$ и $\bar 5$ встречаются все классы вычетов. В других строках есть лишь часть классов: в строках для $\bar 2$ и $\bar 4$ классы $\bar 0, \bar 2, \bar 4$, а в строке для $\bar 3$ — классы $\bar 0$ и $\bar 3$. Легко понять, как обстоит дело в общем случае:

Таблица умножения в F_5

	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$
$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$
$\bar 1$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$
$\bar 2$	$\bar 0$	$\bar 2$	$\bar 4$	$\bar 1$	$\bar 3$
$\bar 3$	$\bar 0$	$\bar 3$	$\bar 1$	$\bar 4$	$\bar 2$
$\bar 4$	$\bar 0$	$\bar 4$	$\bar 3$	$\bar 2$	$\bar 1$

Следствие 2. *Если $(a, m) = d$**), *то уравнение $\bar a \bar x = \bar b$ имеет решение лишь при условии, что b делится на d. В этом случае число решений равно d.*

Предоставляем читателю доказать это утверждение.

В случае, когда модуль является простым числом, можно делить на любой ненулевой класс вычетов — в этом случае все такие классы взаимно просты с модулем. Поэтому, например, в таблице умножения по модулю 5 одна строка состоит из нулей, а остальные содержат по одному разу все классы вычетов.

Теоремы Ферма и Эйлера

В теории чисел очень часто применяется так называемая *Малая теорема Ферма:*

Теорема 3. *Если p — простое число и a не делится на p, то остаток от деления числа a^{p-1} на p равен 1.*

По-другому ее можно сформулировать следующим образом:

Теорема 3'. *Если $\bar a$ — ненулевой класс вычетов по простому модулю p, то $\bar a^{p-1} = \bar 1$.*

Доказательство. Так как $0 < a < p$, а модуль p — простое число, то a и p взаимно просты. Поэтому классы вычетов $\bar a \cdot \bar 1, \bar a \cdot \bar 2, \ldots, \bar a\,(\overline{p-1})$ являются теми же самыми, что и $\bar 1, \bar 2, \ldots, \overline{p-1}$, только

---

*) (a, m) — наибольший общий делитель чисел a и m.

взятыми, быть может, в другом порядке. Так как умножение в F_p коммутативно и ассоциативно, то

$$(\bar a\cdot\bar 1)\ (\bar a\cdot\bar 2)\ \ldots\ (\bar a\cdot\overline{(p-1)})\ =\ \bar 1\times\times\bar 2\cdot\ldots\cdot\overline{(p-1)}.$$

Осталось сократить это равенство на отличный от $\bar 0$ множитель $\bar 1\cdot\bar 2\times\times\ldots\cdot\overline{(p-1)}$, чтобы убедиться в том, что $\bar a^{p-1}=1$.

В теореме Ферма модуль p обязан быть простым числом. Эйлер открыл замечательное обобщение этой теоремы на случай составного модуля m. Классы вычетов $\bar 1, \bar 2, \ldots, \overline{p-1}$, которые мы умножали на $\bar a$, взаимно просты с p. Возьмем и для составного модуля m лишь классы вычетов, взаимно простые с m, и обозначим их число через $\varphi(m)$. Умножение этих классов на класс вычетов $\bar a$, взаимно простой с m, лишь переставляет их. Перемножая эти произведения и рассуждая так же, как при доказательстве Малой теоремы Ферма, приходим к следующему утверждению:

Теорема 4. *Если класс вычетов $\bar a$ взаимно прост с модулем m, то $\bar a^{\varphi(m)}=\bar 1$ (если число a взаимно просто с m, то при делении $a^{\varphi(m)}$ на m получается остаток* 1).

Например, $\varphi(12)=4$: с модулем 12 взаимно просты классы вычетов $\bar 1$, $\bar 5$, $\bar 7$, $\overline{11}$. Число 31 взаимно просто с числом 12. Поэтому при делении 31^4 на 12 получается остаток 1. Проверьте это!

Чтобы успешно применять теорему Эйлера, надо уметь вычислять *функцию Эйлера* *) $\varphi(m)$. Если m — простое число, то $\varphi(m)=m-1$. Можно доказать что если разложение модуля m на простые множители имеет вид $m=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$, то

$$\varphi(m)=m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Например, $600=2^3\cdot 3\cdot 5^2$, и потому

$$\varphi(600)=600\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=160.$$

Первообразные корни

Возьмем какой-нибудь класс вычетов $\bar a$, взаимно простой с модулем m, и начнем возводить его в квадрат, куб и т. д. Мы уже знаем, что $\bar a^{\varphi(m)}=\bar 1$. Но класс $\bar 1$ может встретиться и раньше. Например, $\varphi(11)=10$, а в F_{11} уже $\bar 4^5=\bar 1$. В самом деле, $4^5=1024$ и при делении 1024 на 11 получается остаток 1.

Легко доказать, что если k — наименьший положительный показатель, при котором $\bar a^k=1$, то $\varphi(m)$ делится на k (иначе уже $\bar a^r$, где r — остаток от деления $\varphi(m)$ на k, равнялось бы 1).

Назовем класс вычетов $\bar a$ (по модулю m), взаимно простой с m, *первообразным корнем*, если для него $\varphi(m)$ — наименьший положительный показатель степени, при котором получается $\bar 1$. В этом случае все классы вычетов, взаимно простые с m, являются степенями $\bar a$. Иными словами, для любого такого класса вычетов $\bar b$ найдется показатель k такой, что $\bar a^k=\bar b$. В этом случае k можно назвать «логарифмом $\bar b$ по основанию $\bar a$» — в теории чисел вместо «логарифм» говорят «индекс».

Из сказанного отнюдь не следует, что первообразные корни существуют для всех модулей. Но есть случай, когда ответ заведомо положителен — если модуль является простым числом. Иными словами, если p — простое число, то среди классов вычетов по модулю p найдется хотя бы один первообразный корень. Доказательство этого утверждения вы найдете в следующем номере, в статье «Сравнения по простому модулю».

---

*) Об этой функции см. «Квант», 1977, № 7, с. 2.

Бегущая волна и... автомобильная шина

Л. Гродко

Качества современного автомобиля в значительной степени определяются уровнем развития теории автомобиля. Увеличение скорости автомобиля, его устойчивости, управляемости, плавности хода и улучшение многих других его характеристик требуют непрерывного развития теории, методов расчета и испытаний автомобилей.

Одной из многих интереснейших задач теории автомобиля является задача о критической скорости качения автомобильной шины.

Что такое критическая скорость, от чего зависит значение этой величины, какими способами можно улучшать эту важную характеристику — эти вопросы мы и рассмотрим в настоящей статье.

Начнем с задачи, которая, на первый взгляд, не имеет прямой связи с этими вопросами.

Волна, бегущая по ленте

Рассмотрим «бесконечную» тяжелую ленту, одетую на два вращающихся барабана и «бегущую» со скоростью V. На участке AB эта лента пропущена через неподвижно закрепленную искривленную трубку (рис. 1). Ось этой трубки представляет собой некоторую плоскую кривую (лежащую в плоскости чертежа). Найти силы, действующие со стороны трубки на ленту. Влиянием силы тяжести пренебречь; считать, что трение между лентой и стенками трубки отсутствует; сила натяжения постоянна (по длине ленты) и равна по модулю $|\vec{N}|$. Масса единицы длины ленты (погонная масса) равна m.

Рассмотрим малый элемент CD ленты длиной l, который в данный мо-

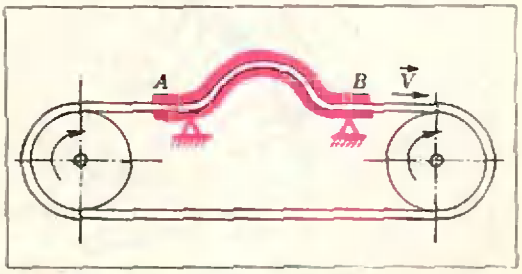


Рис. 1.

мент находится в трубке. Участок трубки, в котором находится этот элемент, можно с хорошим приближением считать дугой окружности. Пусть радиус этой окружности равен R (рис. 2).

Элемент CD движется с постоянной по модулю скоростью V по окружности радиуса R. Следовательно, он имеет центростремительное ускорение, равное V^2/R и направленное к точке O — центру кривизны дуги CD *).

Посмотрим, какие силы сообщают это ускорение элементу CD. Со стороны соседних участков ленты на него действуют силы натяжения N, направленные по касательным к дуге CD в точках C и D (см. рис. 2). Со стороны стенок трубки на ленту действуют силы нормального давления. Пусть на единицу длины ленты действует со стороны трубки сила нормального давления, равная по модулю $|\vec f|$. Тогда сила, действующая на элемент CD, равна $|\vec f|\,l$ (поскольку l мало и $l \ll R$, можно считать, что эта сила равна именно $|\vec f|\,l$, то есть такая же, как если бы элемент CD был прямолинейным). Согласно II закону Ньютона равнодействующая F всех этих сил, направленная к центру кривизны O, и сообщает элементу CD центростремительное ускорение:

$$ml\,\frac{V^2}{R} = |\vec F| \qquad (1)$$

(ml — масса элемента CD). Как видно из рисунка 2, $|\vec F| = |\vec N'| - |\vec f|\,l$, где N' — равнодействующая сил натяжения, действующих на элемент CD со стороны соседних участков ленты. Учитывая, что угол φ мал и $\sin\varphi \approx \varphi$, находим, что $|\vec N'| = 2|\vec N|\,\varphi$, $l = 2R\varphi$. Таким образом,

$$|\vec F| = 2|\vec N|\,\varphi - 2|\vec f|\,R\varphi.$$

Подставим это значение $|\vec F|$ и $l = 2R\varphi$ в выражение (1):

$$2mR\varphi\frac{V^2}{R} = 2|\vec N|\varphi - 2|\vec f|R\varphi.$$

Отсюда найдем $|\vec f|$:

$$|\vec f| = \frac{1}{R}\left(|\vec N| - mV^2\right). \qquad (2)$$

Итак, мы нашли интересовавшую нас силу нормального давления со стороны стенок трубки на ленту. Точнее, мы нашли эту силу, приходящуюся на единицу длины ленты на участке, радиус кривизны которого равен R. Но для дальнейшего рассмотрения нас устроит эта величина.

Проанализируем формулу (2). Величина, стоящая в скобках, не меняется вдоль трубки, так что при данных $|\vec N|$, m и $|\vec V|$ значение $|\vec f|$ определяется радиусом кривизны трубки: $|\vec f|$ пропорционально кри-

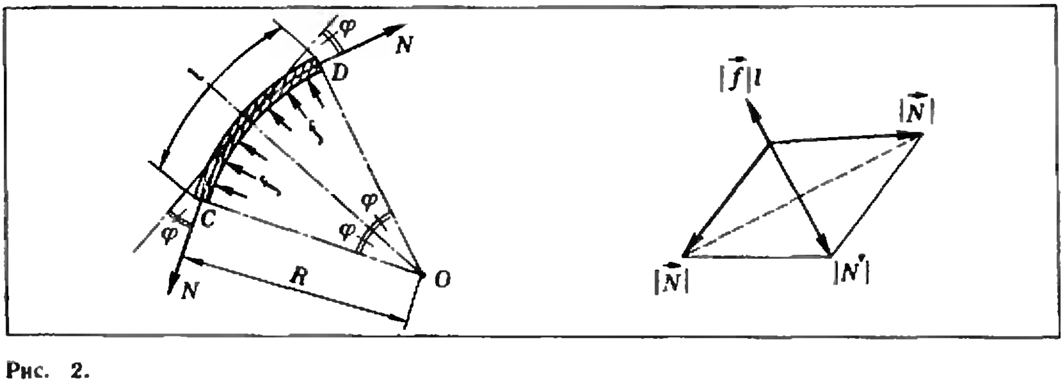


Рис. 2.

---

*) Центр кривизны — центр той окружности, дугой которой является криволинейный участок CD (дуга CD). Величина, обратная радиусу кривизны, называется кривизной

визне — $|\vec{f}| \sim \frac{1}{R}$. Если $\vec{V} = 0$ (лента неподвижна), $|\vec{f}| = \frac{|\vec{N}|}{R}$ — сила давления определяется силой натяжения и кривизной трубки в данной точке. С появлением скорости $\vec{V}$ и с ее ростом значение $|\vec{f}|$ начинает уменьшаться и при скорости, равной

$$|\vec{V}| = \sqrt{\frac{|\vec{N}|}{m}}, \qquad (3)$$

обращается в нуль сразу по всей длине трубки. Назовем эту скорость критической ($V_{кр}$).

Что это означает — $|\vec{f}| = 0$? Это означает, что при $|\vec{V}| = V_{кр}$ лента не взаимодействует с трубкой. Если именно при таком значении скорости трубку убрать, то искривление, ею вызванное, останется — лента по-прежнему будет изогнута на участке AB.

По отношению к наблюдателю, движущемуся вправо со скоростью, равной по модулю $V_{кр}$, это искривление бежит по ленте влево со скоростью $V_{кр}$. Такое явление называется волной, бегущей по ленте, а скорость $V_{кр}$ — скоростью распространения волны.

Представим себе теперь, что $|\vec{V}| < V_{кр}$ и мы убрали трубку, но сумели приложить к ленте на участке AB силы давления f, распределенные по длине ленты так же, как от трубки. Ясно, что при этом лента получит точно такое же искривление, какое было при наличии трубки. В каждой точке кривизна ленты $\frac{1}{R}$ будет связана с приложенными силами давления той же формулой (2). Если силы давления f поддерживать постоянными, а скорость ленты увеличивать, то, как следует из формулы (2), степень искривленности ленты, характеризуемая величиной $\frac{1}{R}$, будет увеличиваться. (При этом характер распределения величины $\frac{1}{R}$ по длине участка AB будет определяться законом распределения сил давления f по длине этого участка.)

При неизменном законе распределения сил давления на участке AB и при скорости ленты, близкой к критической, можно, таким образом, получить как угодно большое искривление ленты на участке AB.

Этот вывод можно сформулировать по-другому. Если по ленте «бежит» нагрузка, то есть давления, некоторым образом распределенные на участке AB, и величина этой нагрузки не меняется, а скорость ее распространения относительно ленты растет, то степень искривленности ленты на участке AB возрастает с ростом скорости, а следовательно, возрастет деформация ленты от данной нагрузки. При приближении скорости к $V_{кр}$ искривление ленты будет возрастать неограниченно. С этой точки зрения получается, что при скорости движения нагрузки, близкой к критической, натянутая лента перестает сопротивляться нагрузке.

Полученный вывод не зависит от характера распределения нагрузки на участке AB, так же как выражение для $V_{кр}$ не зависит от формы искривленной трубки.

Перейдем к автомобилю

Понятие критической скорости «бегущей» нагрузки может быть с помощью более сложных рассуждений распространено и на другие случаи, такие, например, как бегущая по рельсу нагрузка от колеса железнодорожного вагона. Рельс также искривляется от этой нагрузки, но задача в этом случае сложнее, так как рельс в отличие от ленты имеет так называемую «жесткость на изгиб» и лежит на «упругом основании» — земле. Однако и в этом случае существует критическая скорость. Расчеты показывают, что эта скорость очень высока (порядка 1000 км/ч) и может иметь практическое значение лишь при создании поездов, движущихся с очень большими, пока неосуществимыми, скоростями.

А вот при движении современного автомобиля существование критической скорости имеет большое практическое значение. Именно $V_{кр}$ определяет максимальное значение скорости, которую может развивать автомобиль. И ограничение это связано не с двигателем, а с автомобильной шиной.

Шина соприкасается с дорогой так называемой площадкой контакта. Действующие со стороны дороги силы, приложенные к шине в площадке контакта, представляют собой нагрузку, бегущую по шине.

Пневматическая шина (именно такие шины используются для автомобилей) представляет собой оболочку, «натянутую» внутренним давлением воздуха. Форма шины, как всем известно, близка к тороидальной.

Выделим мысленно малый элемент A оболочки шины (рис. 3). На этот участок со стороны соседей действуют силы натяжения, направленные вдоль параллели и вдоль меридиана (точнее, по касательным к ним). Пусть значения этих сил, отнесенных к единице длины (по параллели) и к единице ширины (по меридиану) элемента A, равны, соответственно, $|\vec{N}_x|$ и $|\vec{N}_y|$. Анализ зависимости между этими силами и скоростью шины дает значение критической скорости. Формула для $V_{кр}$ в этом случае оказывается аналогичной формуле (3) для тяжелой ленты —

$$|\vec{V}_{кр}| = \sqrt{\frac{|\vec{N}_x|}{m'}} \qquad (4)$$

— с той разницей, что здесь m' — масса единицы поверхности оболочки. Из формулы (4) видно, что критическая скорость тем больше, чем сильнее растянута шина в направлении параллели.

Для увеличения прочности шины при изготовлении оболочки в качестве «арматуры» используют сетку из очень прочных нитей (корда). Иногда нити делают стальными (для шин грузовых автомобилей, которые должны выдерживать большие нагрузки). Чтобы оценить роль сетки-арматуры, достаточно сказать, что если бы ее не было, то шина «лопалась» бы при избыточных давлениях в 20—30 раз меньших, чем те, которые выдерживает современная шина с сеткой. (Для легковых автомобилей это давление 1,5—2 атм, для грузовых — 4—6 атм.)

Направление нитей корда характеризуется углом α. Значение критической скорости зависит от этого угла:

$$|\vec{V}_{кр}| = K \operatorname{ctg} \alpha.$$

Здесь K — коэффициент, определяемый давлением p воздуха в шине, радиусом r поперечного сечения шины и величиной m':

$$K = \sqrt{\frac{pr}{m'}}.$$

Таким образом,

$$|\vec{V}_{кр}| = \sqrt{\frac{pr}{m'}} \operatorname{ctg} \alpha. \qquad (5)$$

Это — так называемая формула Тарнера. Вы можете вывести ее самостоятельно, используя свое знание школьного курса физики.

Тем, кто решил задачу Ф514 (см. «Квант» № 5, 1978), сделать это просто. Для тех, кто не решал этой задачи, даем указания, которые помогут вывести формулу (5). Рассмотрите условия равновесия элемента A в предположении, что кривизна в на-

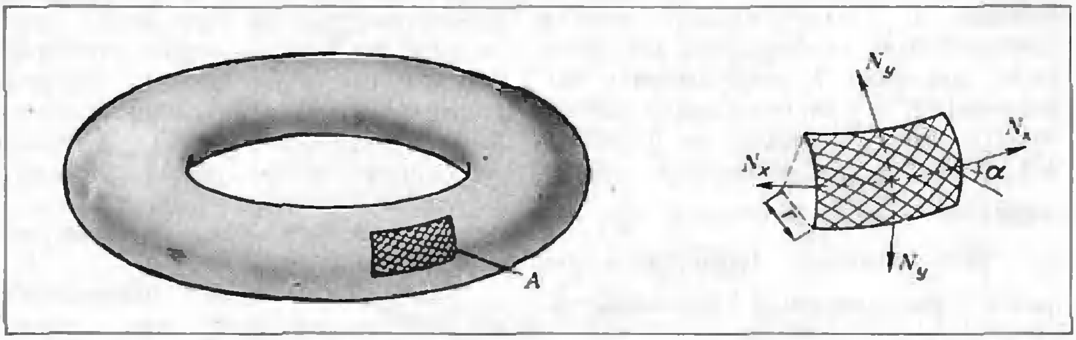


Рис. 3.

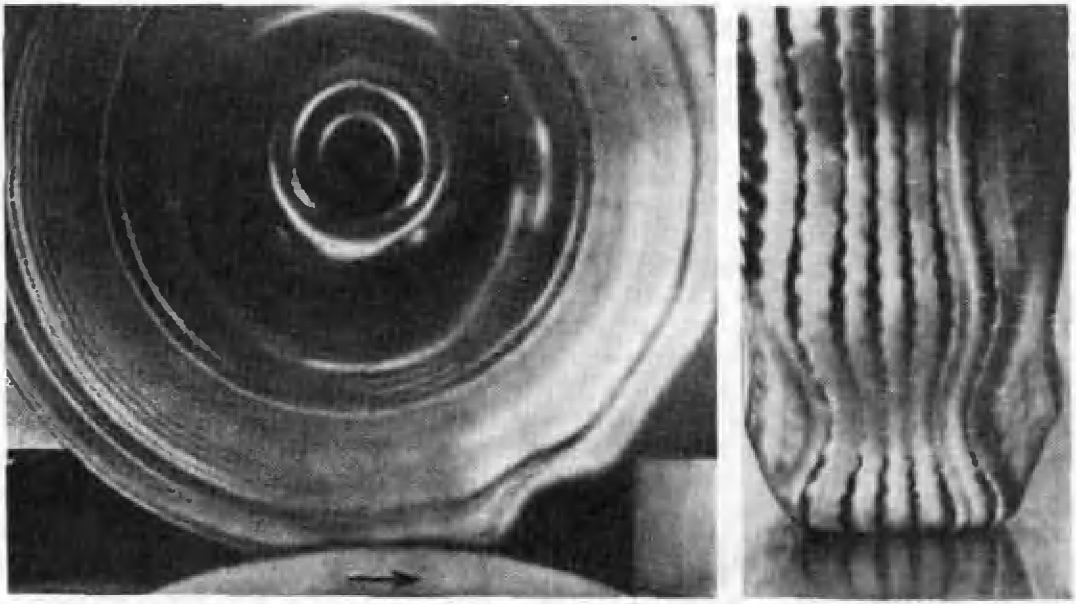


Рис. 4.

правлении параллели равна нулю; это приведет вас к соотношению $|\vec{N}_y| = pr$. Условие относительной неподвижности нитей корда (постоянство угла α) дает связь между $|\vec{N}_y|$ и $|\vec{N}_x|$: $|\vec{N}_x| = |\vec{N}_y| \operatorname{ctg}^2 \alpha = pr \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

Значения критической скорости, рассчитываемые по формуле (5), оказываются довольно близкими к значениям, наблюдаемым на опыте. Для шин легковых автомобилей обычно $|\vec{V}_{кр}| = 150 \div 220$ км/ч. Для скоростных автомобилей этого, разумеется, недостаточно. Формула Тарнера позволяет понять, какими *путями можно повышать критическую* скорость шины. Для этого нужно делать шину возможно более легкой (уменьшать m'), более «толстой» (увеличивать r), увеличивать давление воздуха и использовать сетку-арматуру с как можно меньшим углом α между нитями.

Величина критической скорости шины является очень важной характеристикой, поэтому все шины проходят специальные испытания на критическую скорость. При этих испытаниях ось вращения колеса неподвижна, и шина «катится» по вращающемуся барабану. На рисунке 4 приведена фотография шины при таких испытаниях, когда скорость качения близка к критической. На поверхности шины в районе «выхода» из площадки контакта видны волны. В этих местах деформация шины очень велика. По мере приближения скорости качения к критической деформация возрастает («глубина» волн становится все больше). Увеличить скорость *качения непосредственно* до значения $V_{кр}$ не удается, так как шина разрушается уже при скорости, несколько меньшей $V_{кр}$. Проблема критической скорости является довольно узкой в теории автомобиля. Однако она привлекает большое внимание исследователей. Достаточно сказать, что в научной литературе этой теме посвящены около 250 работ теоретического и экспериментального характера. И тем не менее вопрос еще далек от полного решения.

В. Болтянский

Три точки на одной прямой

В этой статье мы рассмотрим несколько задач, для решения которых оказывается полезным использование векторов. В основном, это задачи, в которых требуется доказать, что некоторые три точки лежат на одной прямой, или из того, что некоторые три точки лежат на одной прямой, вывести те или иные следствия. Главной для решения таких задач является хорошо известная

Теорема. *Точка C в том и только в том случае принадлежит прямой AB, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны* (т. е. существует такое число $k \in R$, что $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$).

Таким образом, чтобы установить принадлежность трех точек A, B и C одной прямой, достаточно убедиться, что существует число k, для которого $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$. Число k в соотношении $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ имеет (при $A\neq B$) простой геометрический смысл: $|k|=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}$, причем $k>0$, если точка C принадлежит лучу AB, и $k<0$, если она принадлежит противоположному лучу.

Если, например, C — середина отрезка AB (рис. 1), то $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; отсюда *для любой точки Q*

$$\overrightarrow{QC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{QA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{QB}.$$

Если, далее, B — середина стороны MN треугольника AMN, а C — центр тяжести (точка пересечения медиан) этого треугольника, то длина отрезка AC составляет $\frac{2}{3}$ длины отрезка AB (рис. 2): $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; поскольку для любой точки Q выполняется равенство

$$\overrightarrow{QB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{QM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{QN},$$

можно заключить, что

$$\overrightarrow{QC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{QA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{QM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{QN}.$$

Наконец, еще одно замечание: *если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то из соотношения*

$$k\vec{a}+l\vec{b}=m\vec{a}+n\vec{b}$$

вытекает, что $k=m$ и $l=n$. В самом деле, это равенство можно переписать в виде

$$(k-m)\vec{a}=(n-l)\vec{b};$$

если теперь $k\neq m$, то $\vec{a}=\frac{n-l}{k-m}\vec{b}$, что противоречит неколлинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Таким образом, $k=m$ и, аналогично, $l=n$.

Вот и вся «теоретическая» премудрость. А теперь рассмотрим подробно четыре примера.

Пример 1. Хорошо известно, что середины оснований трапеции и точка пересечения ее диагоналей расположены на одной прямой. Докажем теперь в некотором смысле «обратную» теорему: *если точка A пересечения диагоналей четырехуголь-*

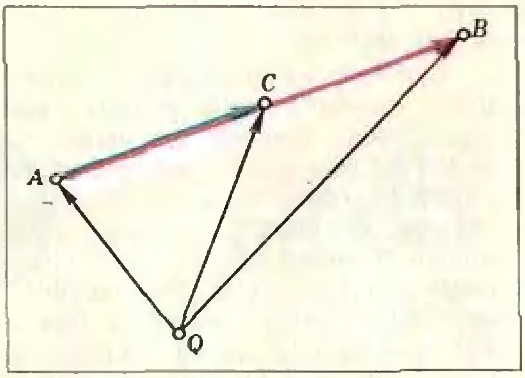


Рис. 1.

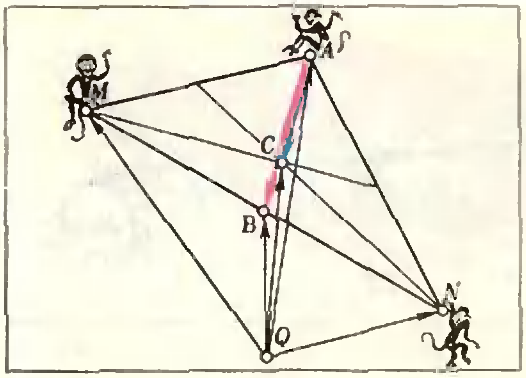


Рис. 2.

ника MNPQ и середины B, C его противоположных сторон MN и PQ лежат на одной прямой, то MNPQ — трапеция или параллелограмм (рис. 3).

Доказательство. Положим $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$. Тогда $\overrightarrow{AP} = k\vec{a}$ (так как точки A, M, P лежат на одной прямой) и, точно так же, $\overrightarrow{AQ} = l\vec{b}$. Так как B — середина отрезка MN,

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Точно так же

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ} = \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{l}{2}\vec{b}.$$

По условию точки A, B, C лежат на одной прямой, и потому существует такое число m, что $\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB}$, то есть

$$m\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{l}{2}\vec{b}.$$

В силу неколлинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отсюда вытекает, что $m = k = l$.

Наконец, имеем

$$\overrightarrow{MN} = \vec{b} - \vec{a},\ \overrightarrow{PQ} = l\vec{b} - k\vec{a} = k(\vec{b} - \vec{a}),$$

то есть $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{MN}$. Следовательно, $(PQ) \parallel (MN)$, то есть $MNPQ$ — трапеция или параллелограмм.

Замечания. На рисунке 3 точки A, M, N, P, Q расположены так, что числа k и l отрицательны. Однако в решении это нигде не использовалось. Поэтому приведенное рассуждение пригодно без всяких изменений и к случаю, когда числа k, l положительны. Этот случай изображен на рисунке 4. Таким образом, мы «задаром» получили доказательство и такой теоремы: *если точка A, в которой пересекаются продолжения сторон NQ и MP четырехугольника MNQP, и середины B, C сторон MN и PQ расположены на одной прямой, то четырехугольник MNQP* — трапеция. Предоставляем читателю убедиться также, что приведенные рассуждения проходят (почти без изменений) в обратном порядке. Это дает векторное доказательство соответствующих «прямых» теорем: *во всякой трапеции середины оснований и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой; во всякой трапеции середины оснований и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой* (иными словами, все четыре указанные точки расположены на одной прямой).

Пример 2. *На стороне ON параллелограмма AMNO и на его ди-*

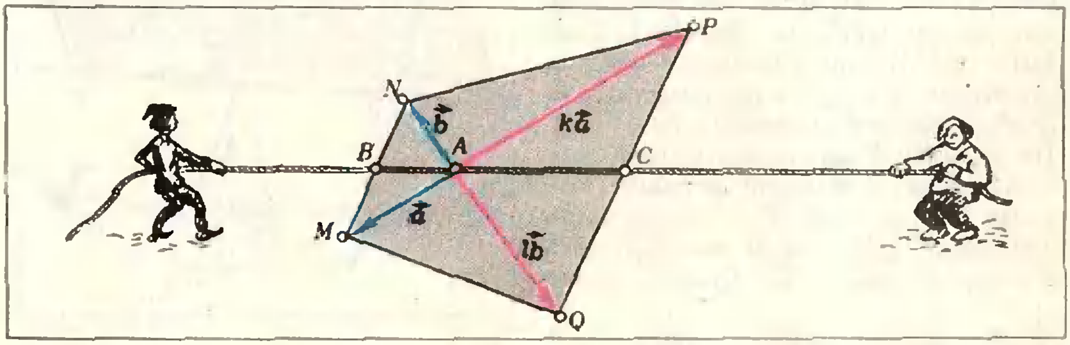


Рис. 3.

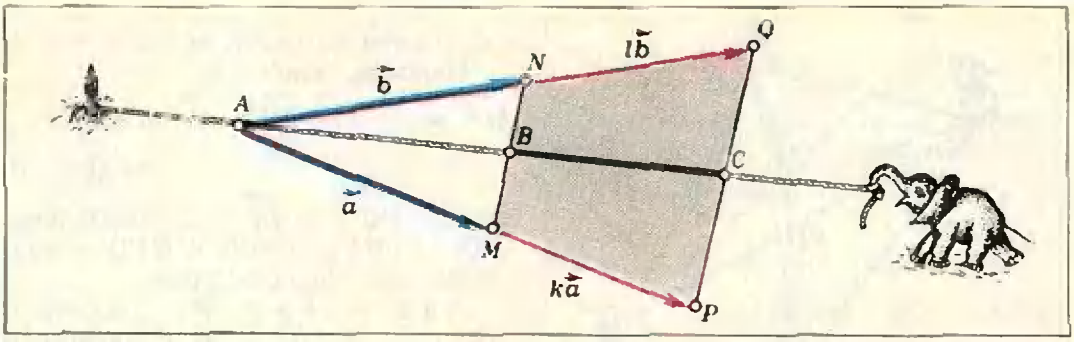


Рис. 4.

агонали OM взяты такие точки B и C, что $\vec{OB}=\frac{1}{n}\vec{ON}$ и $\vec{OC}=\frac{1}{n+1}\vec{OM}$ *(рис. 5). Доказать, что точки A, B, C лежат на одной прямой.*

Решение. Положим $\vec{AB}=\vec a$, $\vec{ON}=\vec b$. Тогда

$$\vec{AC}=\vec{AO}+\vec{OC}=\vec{AO}+\frac{1}{n+1}\vec{OM};$$

$$\vec{AO}=\vec{AB}-\vec{OB}=\vec a-\frac{1}{n}\vec b;$$

$$\vec{OM}=\vec{ON}-\vec{AO}=\vec b-\left(\vec a-\frac{1}{n}\vec b\right)=\frac{n+1}{n}\vec b-\vec a,$$

то есть

$$\vec{AC}=\left(\vec a-\frac{1}{n}\vec b\right)+\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\vec b-\vec a\right)=\frac{n}{n+1}\vec a,$$

или $\vec{AC}=\frac{n}{n+1}\vec{AB}$. Из этого следует, что точки A, B, C лежат на одной прямой.

Замечания. В решении нигде не использовалось, что число n — натуральное. Приведенное рассуждение показывает, что здесь n может быть любым действительным числом, отличным от 0 и -1 (в знаменателях дробей имеются выражения n и $n+1$). На рисунке 5 изображен случай $n=4$ (точка B отсекает четверть стороны ON, а точка C — пятую часть диагонали OM). Если же положить $n=-m-1$, то будем иметь $\frac{1}{n}=-\frac{1}{m+1}$, $\frac{1}{n+1}=-\frac{1}{m}$, т. е.

$$\vec{OB}=-\frac{1}{m+1}\vec{ON},\quad \vec{OC}=-\frac{1}{m}\vec{OM}.$$

На рисунке 6 изображен случай, когда $m=3$ (на продолжении стороны ON от точки O отложена четверть этой стороны, а на продолжении диагонали — треть этой диагонали).

Пример 3. *Дан треугольник MNP. На прямых MN, NP, PM взяты точки A, B и C:*

$$\vec{MA}=\alpha\vec{AN},\quad \vec{NB}=\beta\vec{BP},$$
$$\vec{PC}=\gamma\vec{CM}.$$

Доказать, что если $\alpha\beta\gamma=-1$, *то точки A, B, C лежат на одной прямой* (теорема Менелая).

Доказательство. Положим $\vec{AN}=\vec a$, $\vec{BP}=\vec b$, $\vec{CM}=\vec c$. Тогда

$$\vec{MA}=\alpha\vec a,\quad \vec{NB}=\beta\vec b,\quad \vec{PC}=\gamma\vec c.$$

Векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ легко выразить

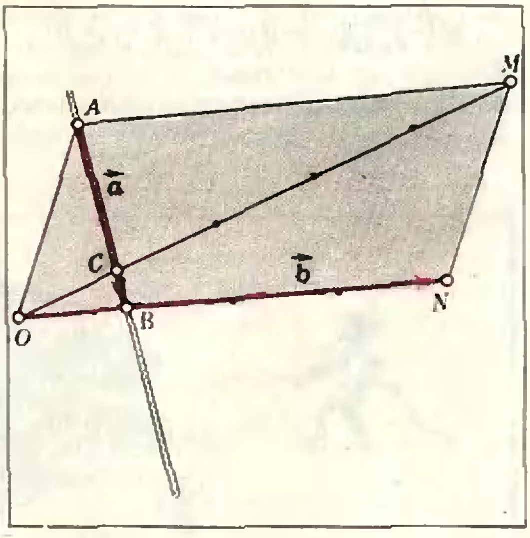


Рис. 5.

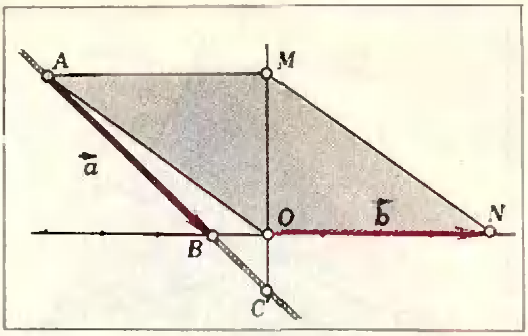


Рис. 6.

через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB} = \vec{a} + \beta\vec{b},$$

$$\overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA}) = -\vec{c} - \alpha\vec{a}.$$

Далее, так как $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$, то есть $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BP}) + (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CM}) = \vec{0}$, получаем

$$(\alpha + 1)\vec{a} + (\beta + 1)\vec{b} + (\gamma + 1)\vec{c} = \vec{0}.$$

Используя это соотношение, исключим вектор $\vec{c}$ из выражения для $\overrightarrow{AC}$, то есть выразим вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Имеем

$$(\gamma + 1)\overrightarrow{AC} = -(\gamma + 1)\vec{c} - (\alpha\gamma + \alpha)\vec{a} =$$

$$= (\alpha + 1)\vec{a} + (\beta + 1)\vec{b} - (\alpha\gamma + \alpha)\vec{a} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\vec{a} + (\beta + 1)\vec{b} =$$

$$= \frac{\beta + 1}{\beta}\left(\vec{a} + \beta\vec{b}\right) = \frac{\beta + 1}{\beta}\overrightarrow{AB}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $-\alpha\gamma = \frac{1}{\beta}$). Таким образом,

$$\overrightarrow{AC} = \frac{\beta + 1}{\beta(\gamma + 1)}\overrightarrow{AB};$$

следовательно, точки A, B, C лежат на одной прямой.

Замечания. Если $\alpha > 0$, то $A \in [MN]$; в случае же $\alpha < 0$ точка A лежит на прямой MN вне отрезка MN (и аналогично для β и γ). Поэтому равенство $\alpha\beta\gamma = -1$ означает, что либо две из трех точек A, B, C лежат на двух сторонах треугольника MNP, а третья точка — на продолжении третьей стороны (рис. 7), либо же все три точки лежат на продолжениях сторон треугольника (рис. 8). Отметим также, что в приведенном доказательстве были первоначально взяты не два, а три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Сделано это для того, чтобы обозначения и вычисления были «симметричными» относительно всех трех вершин треугольника. Однако для получения окончательного вывода пришлось третий вектор исключить и выразить $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ через два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (из соотношений, выражающих $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, не видно, что $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны).

Пример 4. *На сторонах треугольника ABC взяты точки M и N: $\overrightarrow{CN} = \alpha\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CM} = \beta\overrightarrow{CB}$. O — точка пересечения отрезков AM и BN* (рис. 9). *Определить отношения $|AO| : |AM|$ и $|BO| : |BN|$.*

Решение. Положим $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, а величины искомых отношений обозначим через x и y, так что $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BO} = y\overrightarrow{BN}$. По условию $\overrightarrow{CN} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{CM} = \beta\vec{b}$. Имеем

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \beta\vec{b} - \vec{a},$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CB} = \alpha\vec{a} - \vec{b},$$

и потому

$$\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AM} = x(\beta\vec{b} - \vec{a}),$$

$$\overrightarrow{BO} = y\overrightarrow{BN} = y(\alpha\vec{a} - \vec{b}).$$

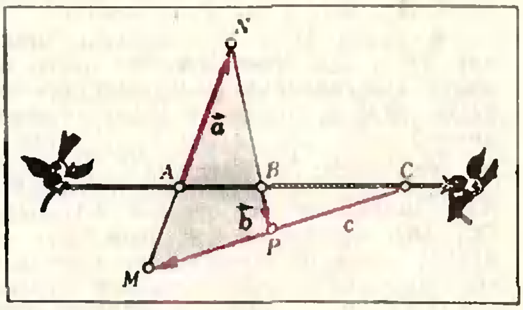


Рис. 7.

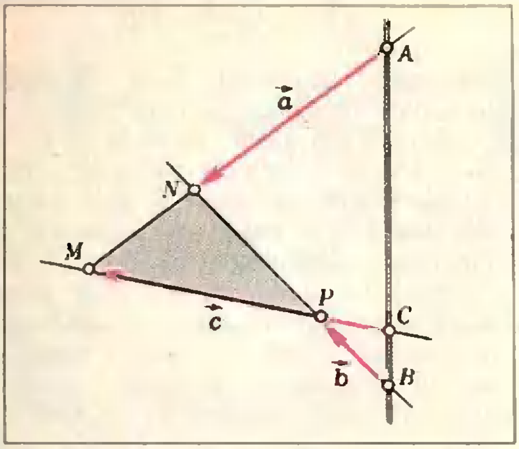


Рис. 8.

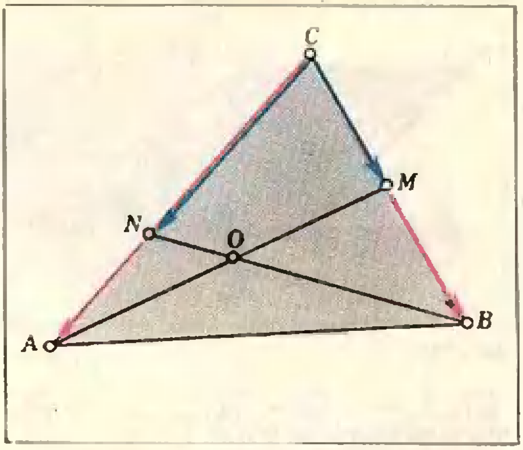


Рис. 9.

Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, получаем

$$\vec{b} - \vec{a} = x(\beta\vec{b} - \vec{a}) - y(\alpha\vec{a} - \vec{b}),$$

то есть

$$(x + \alpha y - 1)\,\vec{a} - (y + \beta x - 1)\,\vec{b} = \vec{0}.$$

Ввиду неколлинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, коэффициенты в левой части последнего равенства должны быть равны нулю, то есть

$$\begin{cases} x + \alpha y = 1, \\ \beta x + y = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим ответ:

$$x = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}, \quad y = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}.$$

Задачи

1. Точки A, B, C, M и N, не лежащие на одной прямой, расположены так, что лучи AM и BN параллельны и противоположно направлены; $|AC| = p$, $|BC| = q$, $|AB| = p + q$. При каком соотношении между длинами отрезков AM и BN точки M, N и C расположены на одной прямой?

2. Прямые a и b параллельны. На прямой a взяты произвольные точки A_1, A_2, A_3, на прямой b — произвольные точки B_1, B_2, B_3. На отрезках A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 взяты такие точки C_1, C_2, C_3, что $|A_1C_1| = \alpha|A_1B_1|$, $|A_2C_2| = \alpha|A_2B_2|$, $|A_3C_3| = \alpha|A_3B_3|$. Докажите, что точки C_1, C_2, C_3 расположены на одной прямой.

3. Точки M, N, P симметричны точке O относительно середин сторон треугольника ABC. Докажите, что точка O и центры тяжести треугольников ABC и MNP лежат на одной прямой.

4. Точки A, B, C — центры тяжести треугольников OMN, ONP, OMP. Докажите, что центры тяжести треугольников MNP и ABC и точка O лежат на одной прямой.

5. Точки M и N — середины сторон CD и DA параллелограмма $ABCD$, O — точка пересечения отрезков AM и BN. Определите отношение $|ON| : |OB|$. Решите задачу в общем случае ($\overrightarrow{AN} = \alpha\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DM} = \beta\overrightarrow{DC}$).

6. На сторонах треугольника ABC взяты такие точки K, L, M, что $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$. При пересечении прямых AL, BM и CK образовался треугольник PQR. Докажите, что точки P, Q, R являются серединами отрезков AQ, BR, CP.

7. На продолжениях сторон треугольника ABC взяты такие точки P, Q, R, что $\overrightarrow{BP} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CQ} = \alpha\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AR} = \alpha\overrightarrow{CA}$. Точки пересечения лучей PA, QB, RC со сторонами треугольника PQR обозначены через K, L, M. Вычислите отношения $|RK| : |RQ|$, $|QM| : |QP|$, $|PL| : |PR|$.

8. Докажите, что три отрезка, каждый из которых соединяет середины двух противоположных ребер треугольной пирамиды $ABCD$, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам. Как изменится формулировка, если точки A, B, C, D лежат в одной плоскости?

9. Точки M и N — середины отрезков AB и CD. Докажите, что центр тяжести треугольника BCD, середина отрезка MN и точка A лежат на одной прямой.

10. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — центры тяжести треугольников BCD, ACD, ABD, ABC. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 пересекаются в одной точке M, причем точка M отсекает от каждого из этих отрезков четверть. Сделайте чертежи для плоского и пространственного случаев.

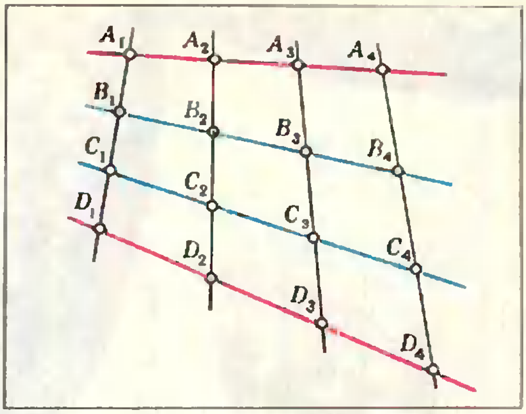


Рис. 10.

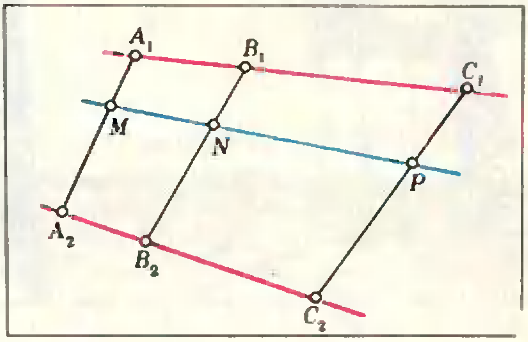


Рис. 11.

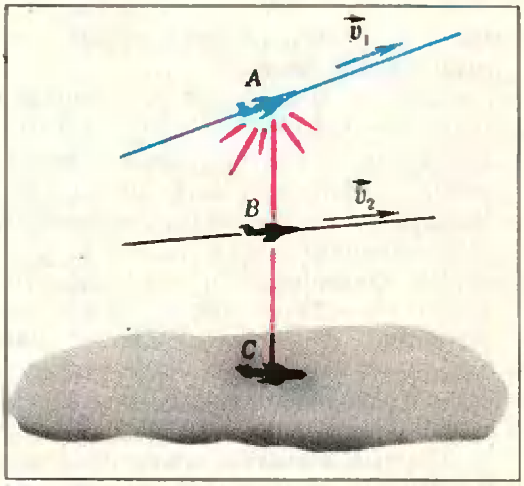


Рис. 12.

11. Докажите, что если точка пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ принадлежит диагонали AC, то диагональ BD делится диагональю AC пополам. Справедлива ли обратная теорема?

12. Дан треугольник MNP. На прямых MN, NP, PM взяты такие точки A, B, C, что $\overrightarrow{MA} = \alpha\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NB} = \beta\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{PC} = \gamma\overrightarrow{CM}$. Докажите, что если $\alpha\beta\gamma = 1$, то прямые MB, NC и PA пересекаются в одной точке (теорема Чевы).

13. Отрезки A_1A_4 и D_1D_4 (произвольно расположенные в пространстве) разделены на три конгруэнтные части каждый точками A_2, A_3 и, соответственно, D_2, D_3 (рис. 10). Точки B_i и C_i делят отрезок A_iD_i на три конгруэнтные части ($i = 1, 2, 3, 4$). Докажите, что точки B_1, B_2, B_3, B_4 лежат на одной прямой и точки C_1, C_2, C_3, C_4 лежат на одной прямой.

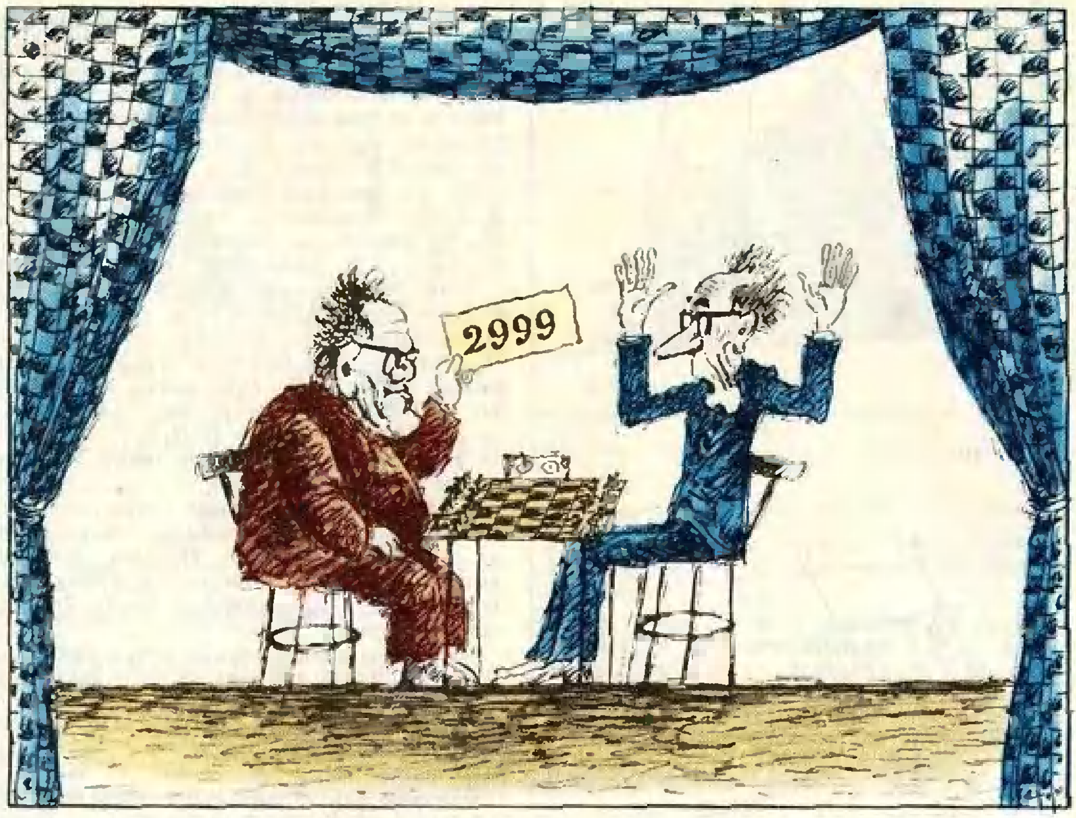
14. На отрезках A_1C_1 и A_2C_2 (произвольно расположенных в пространстве) взяты такие точки B_1 и B_2, что $|A_1B_1| = \alpha|A_1C_1|$, $|A_2B_2| = \alpha|A_2C_2|$. На отрезках A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 взяты такие точки M, N, P (рис. 11), что $|A_1M| = \beta|A_1A_2|$, $|B_1N| = \beta|B_1B_2|$, $|C_1P| = \beta|C_1C_2|$. Докажите, что точки M, N, P лежат на одной прямой.

15. Две материальные точки движутся равномерно (с ненулевыми скоростями) по двум прямым a и b. Прямая, соединяющая движущиеся точки, все время проходит через неподвижную точку O. Докажите, что $a \| b$.

16. Две материальные точки движутся в пространстве прямолинейно и равномерно со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Положения движущихся точек в момент времени t обозначим через A_t и B_t, а через C_t обозначим такую точку отрезка A_tB_t, что $|A_tC_t| : |A_tB_t| = \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$. Докажите, что точка C_t также движется равномерно и прямолинейно. С какой скоростью?

17. Самолет, несущий яркий точечный источник света, движется над плоской поверхностью равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}_1$, а второй самолет — равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}_2$. В некоторый момент первый самолет, второй самолет и тень второго самолета находятся, соответственно, в точках A, B, C (рис. 12), причем $|BC| = \alpha|AC|$ $(0<\alpha<1)$. При каком соотношении между скоростями самолетов тень второго самолета тоже движется равномерно и прямолинейно?

18. Три материальные точки движутся в пространстве равномерно и прямолинейно, каждая — со своей скоростью. Положения движущихся точек в момент времени t обозначим через A_t, B_t, C_t. Докажите, что центр тяжести треугольника $A_tB_tC_t$ также движется равномерно и прямолинейно.



Е. Гик

Ваш рейтинг, гроссмейстер?

На страницах «Кванта» мы не раз писали о различных связях, существующих между математикой и шахматами. В этой статье мы расскажем о системе коэффициентов Эло, широко используемой ныне для оценки и прогноза результатов шахматистов в соревнованиях (турнирах и матчах).

В те далекие времена, когда во всем мире в шахматных турнирах выступало всего несколько десятков мастеров, сравнивать результаты шахматистов было совсем нетрудно. Вопрос, кто из двух мастеров играет сильнее, решался просто: на протяжении какого-то отрезка времени они встречались между собой в турнирах, и если один регулярно опережал другого, значит, он и был сильнее; если же впереди оказывался то один, то другой, можно было предположить, что их сила примерно одинакова; в особо спорных случаях между ними устраивался матч.

Сейчас шахматные соревнования происходят одновременно в нескольких странах и даже в нескольких городах одной страны. В одних лишь международных квалификационных соревнованиях (то есть таких, в которых присваиваются международные звания) участвует добрая тысяча шахматистов, из которых многие знают друг о друге лишь понаслышке. В таких условиях сравнивать силу мастеров стало куда труднее.

Первые попытки построить систему оценок силы шахматистов относятся к началу века. А в конце 50-х годов начались практические испытания нескольких систем, основанных на том, что каждому шахматисту присваивается меняющийся от соревнования к соревнованию индивидуальный коэффициент, или, иначе, рейтинг (от английского слова rating — «оценка»), вычисляемый по определенной формуле и зависящий от коэффициентов противников и пока-

Таблица 1

$\|\Delta K\|$	$h_б$	$h_м$	$\|\Delta K\|$	$h_б$	$h_м$	$\|\Delta K\|$	$h_б$	$h_м$
0—3	50	50	122—129	67	33	279—290	84	16
4—10	51	49	130—137	68	32	291—302	85	15
11—17	52	48	138—145	69	31	303—315	86	14
18—25	53	47	146—153	70	30	316—328	87	13
26—32	54	46	154—162	71	29	329—344	88	12
33—39	55	45	163—170	72	28	345—357	89	11
40—46	56	44	171—179	73	27	358—374	90	10
47—53	57	43	180—188	74	26	375—391	91	9
54—61	58	42	189—197	75	25	392—411	92	8
62—68	59	41	198—206	76	24	412—432	93	7
69—76	60	40	207—215	77	23	433—456	94	6
77—83	61	39	216—225	78	22	457—484	95	5
84—91	62	38	226—235	79	21	485—517	96	4
92—98	63	37	236—245	80	20	518—559	97	3
99—106	64	36	246—256	81	19	560—619	98	2
107—113	65	35	257—267	82	18	620—735	99	1
114—121	66	34	268—278	83	17	свыше 735	100	0

занного результата. После многолетнего обсуждения различных систем коэффициентов (принципиально не отличающихся друг от друга) Международная шахматная федерация (ФИДЕ) в 1970 году официально приняла систему индивидуальных коэффициентов, разработанную американским математиком профессором Арпадом Эло.

Покажем сначала, как по системе Эло ведется расчет коэффициентов, а затем обсудим ряд ее особенностей.

Пусть «старый» коэффициент данного участника (т. е. коэффициент перед началом соревнования) — $K_{ст}$. «Новый» коэффициент (коэффициент после окончания соревнования) $K_{нов}$ находится по следующей формуле:

$$K_{нов} = K_{ст} + 10\,(N - N_{ож}), \qquad (1)$$

где N — число набранных очков (результат шахматиста в соревновании), а $N_{ож}$ — так называемое *ожидаемое число очков*.

Для вычисления $N_{ож}$ прежде всего подсчитывается средний коэффициент $K_{ср}$ всех соперников данного шахматиста (в случае матча $K_{ср}$ совпадает с $K_{ст}$ его партнера), который затем округляется до целого числа *). Затем находится отклонение коэффициента $K_{ст}$ от $K_{ср}$:

$$\Delta K = K_{ст} - K_{ср}. \qquad (2)$$

Теперь из таблицы 1 по $|\Delta K|$ определяется *ожидаемый процент очков*:

$$h = \begin{cases} h_б, & \text{если } \Delta K \geqslant 0, \\ h_м, & \text{если } \Delta K < 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Наконец, ожидаемое число очков получается при округлении до 0,5 очка по следующей формуле:

$$N_{ож} = \frac{h}{100} \cdot m, \qquad (4)$$

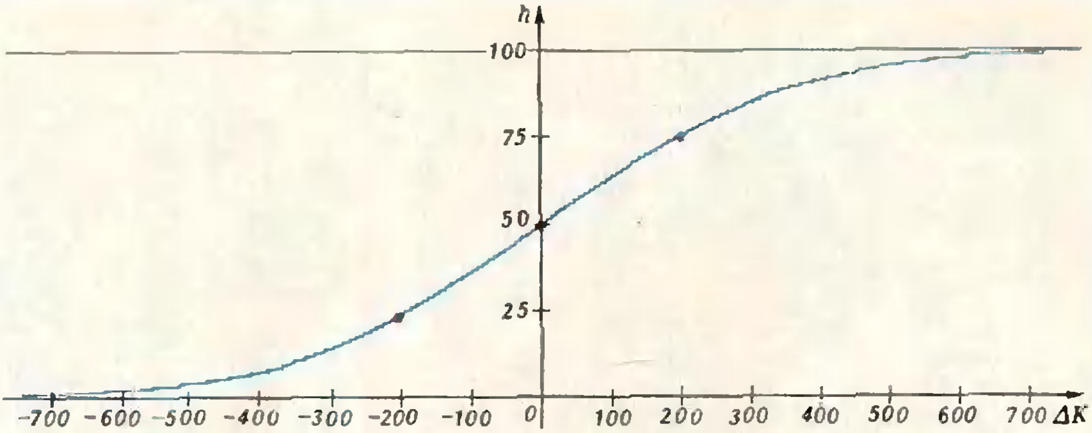
где m — число партий, которое шахматисту предстоит сыграть в соревновании. Неформально говоря, $N_{ож}$ — это наиболее вероятный результат шахматиста в соревновании, а h — наиболее вероятный процент набранных очков; это и объясняет соотношение (4).

Заметим, что в СССР при расчете рейтингов советских шахматистов с 1 января 1977 года официально используется система Эло, с той лишь разницей, что округление в формуле (4) производится до 0,1 очка.

Если перед началом турнира мы хотим найти $K^i_{нов}$ каждого участника турнира, мы должны, в соответствии с равенством (2), вычислить средние рейтинги $K^i_{ср}$ противников каждого участника ($i = 1, 2, \ldots, n$). Оказывается, эту работу можно

---

*) «Пограничные» числа (вроде 2377,5) округляются, по соглашению, в любую сторону — например, в сторону меньших чисел.



упростить. Пусть $K^1_{ст}, K^2_{ст}, \dots, K^n_{ст}$ — рейтинги участников турнира до его начала. Введем величину

$$K_т = \frac{K^1_{ст} + K^2_{ст} + \dots + K^n_{ст}}{n}$$

(она округляется до целого числа), называемую *коэффициентом турнира*. Легко доказать, что

$$\Delta K = \frac{n}{n-1}(K_{ст} - K_т), \qquad (5)$$

где округление вновь производится до целого числа (результаты округлений в формулах (2) и (5) совпадают). Таким образом, вместо того, чтобы n раз вычислять коэффициенты $K^i_{ср}$, нам достаточно один раз найти коэффициент $K_т$, после чего для определения ΔK пользоваться формулой (5).

Для квалификации международного турнира по системе Эло необходимо, чтобы: 1) не менее 2/3 его участников имели рейтинг; 2) коэффициент турнира $K_т$ был не менее 2250. Если же перед началом такого турнира у кого-то из участников еще нет рейтинга, то он получает начальный коэффициент $K_0 = 2200$ (который, очевидно, после турнира может уменьшиться). Так как K_0 — число целое, а числа $N_{ож}$ округляются до 0,5 или 0,1, рейтинги шахматистов — всегда числа целые, причем у Эло они оканчиваются на 0 или 5.

Внимательно посмотрев на таблицу 1, мы замечаем, что от строки к строке процент h меняется на 1 и при достижении $h_б = 100$ (соответственно, $h_м = 0$) уже не меняется (мы попадаем в «зону насыщения»).

Чтобы лучше понять таблицу 1, постараемся графически изобразить зависимость h от ΔK, причем h будем воспринимать в соответствии с интуитивным смыслом слов «ожидаемый процент очков».

Если коэффициент $K_{ст}$ данного участника совпадает с $K_{ср}$ его противников, то следует ожидать, что он наберет 50% очков; поэтому искомая кривая должна проходить через точку с координатами $\Delta K = 0$, $h = 50$. Естественно считать ее симметричной относительно этой точки. Если $K_{ст} > K_{ср}$, то, разумеется, $h > 50$, а если $K_{ст} < K_{ср}$, то $h < 50$. Поскольку h меняется от 0 до 100, кривая должна асимптотически стремиться к прямой $h = 100$ при $\Delta K \to +\infty$ и к оси абсцисс при $\Delta K \to -\infty$.

Огромная статистика соревнований показывает, что если из двух шахматистов, играющих матч, один, так сказать, сильнее другого на разряд, то он в среднем набирает 75% очков.

Указанное обстоятельство Эло при построении кривой учел следующим образом: положив, что разница между двумя соседними ступеньками в шахматной иерархии составляет 200 единиц рейтинга, он провел кривую через точку с координатами $\Delta K = 200$, $h = 75$ (и, соответственно, $\Delta K = -200$, $h = 25$).

Итак, вид нашей кривой довольно ясен (см. рисунок), и ее можно использовать для определения значений h при данных ΔK. Однако такой способ нахождения h неудобен по нескольким причинам. Во-первых, сама кривая, несмотря на вышеуказанные свойства, не определена однозначно; во-вторых, целых значений ΔK бесконечно много и их нельзя — все — затабулировать; наконец, не измерять же всякий раз величину h линейкой! Поэтому и возникает идея разбить ось абсцисс на конечное число отрезков (и два бесконечных полуинтервала) с постоянным h на каждом из них так, чтобы значения h на соседних отрезках отличались на 1.

В результате вместо нашей гладкой кривой мы получаем «лестницу» (см. рисунок). Высота всех ее ступенек одинакова и равна 1, а их длины по мере удаления от центра в соответствии с поведением кривой увеличиваются.

Разумеется, таблица 1, построенная по этой «лестнице», могла бы выглядеть и несколько иначе (при выборе чуть более узких или более широких отрезков с фиксированным h), однако принципиального значения это не имеет — лишь бы сохранялся общий характер зависимости h от ΔK.

В настоящее время перед началом любого крупного турнира подсчитываются числа $N_{ож}$ для всех его участников, что позволяет прикинуть окончательные итоги турнира и наиболее вероятное распределение мест в нем. Однако этот популярный способ прогнозирования можно применять не только перед началом соревнования, но и перед каждым его туром. Если мы сложим очки, набранные участником в уже состоявшихся турах, с очками, которые «обещают» ему коэффициенты Эло в оставшихся турах, мы получим ожидаемый результат в турнире с учетом уже сыгранных партий. Естественно считать, что эти прогнозы точнее характеризуют положение участников в данный момент, чем фактически набранное ими число очков, так как они учитывают информацию об оставшихся противниках.

Метод прогнозирования, о котором идет речь, имеет некоторые технические трудности. Ведь, скажем, при 22 участниках турнира для нахождения чисел $N_{ож}$ перед каждым туром расчет ожидаемых результатов придется провести 21 раз. Вручную такая работа потребует нескольких часов вычислений, причем к ней можно приступить только после жеребьевки турнира. Впрочем, ЭВМ справляется с такой задачей всего за какую-то минуту!

При применении формулы (1) возникает парадокс, на котором стоит остановиться подробнее. Представьте себе, что вы решили сыграть матч со своим товарищем, скажем, из 1000 партий. Вы оба — перворазрядники и имеете одинаковый рейтинг 2000. Пусть вы выиграли этот марафон со счетом 580 : 420. По прогнозу вы должны были свести матч вничью, т. е. набрать $N_{ож} = 500$ очков. Разница в 80 очков даст вам прибавку к рейтингу 800 единиц. Итак, закончив этот матч, вы получите рейтинг 2800 — больше, чем у самого чемпиона мира!

Нетрудно видеть, что при увеличении числа партий в матче рейтинг одного шахматиста вообще может неограниченно расти, рейтинг другого — неограниченно падать.

Таким образом, линейная зависимость между результатом шахматиста в соревновании и приращением его рейтинга не совсем правомерна. Выйти из положения пытались разными способами. Самый распространенный из них — введение в формуле (1) вместо коэффициента 10 переменного параметра α, зависящего от числа партий:

$$K_{нов} = K_{ст} + \alpha\ (N - N_{ож}).$$

При этом от парадокса удается избавиться, но заметно усложняется расчет коэффициентов.

Происхождение парадокса связано с тем, что коэффициенты шахматистов фактически меняются не только в конце соревнования, но и в процессе его. Так, в упомянутом матче из 1000 партий вскоре после его начала вы поведете в счете, что должно привести к увеличению вашего рейтинга и падению рейтинга противника. Если вы в среднем набираете 58% очков (согласно окончательному счету), то, как только разница в ваших рейтингах достигнет 60 единиц (2030 против 1070), коэффициенты стабилизируются и в дальнейшем не будут сильно меняться (разница в 60 единиц рейтинга как раз соответствует 58% очков — см. таблицу 1).

Из сказанного следует, что система Эло исправляется очень просто — пересчет коэффициентов следует производить после каждой партии! Однако такой частый пересчет, оправдываемый математически, практически никого не устроит. Итак, не годится расчет рейтингов ни после большого числа партий, ни после каждой партии.

Истина, как всегда, лежит посередине. Формула (1) проста и удобна, и не хочется от нее отказываться, но необходимо ограничиться «средним» числом партий. Сам Эло полагает, что если $m \leqslant 25$, то никаких недора-

Таблица 2

Эм. Ласкер, Х. Р. Капабланка, М. Ботвинник	2720
М. Таль	2700
П. Морфи (за три года выступлений)	2690
А. Алехин, В. Смыслов	2680
Д. Бронштейн, П. Керес	2670
С. Решевский, Р. Файн	2660
В. Стейниц, И. Болеславский, М. Найдорф	2650
А. Рубинштейн, М. Эйве, С. Глигорич	2640
С. Флор, А. Котов	2620
З. Тарраш, Г. Мароци, А. Нимцович, Е. Боголюбов	2610
А. Андерсен, Г. Пильсбери, М. Видмар, Г. Штальберг, Л. Сабо	2600

зумений не произойдет, и линейная зависимость в (1) вполне допустима. Практически большего числа партий в соревнованиях и не бывает. Исключение может представить только матч на первенство мира, проводимый по новой системе (без ограничения числа партий). Видимо, в этом случае матч следует разбить на отдельные отрезки длиной не более 25 партий, и после каждого из них подправлять коэффициенты партнеров.

Итак, система индивидуальных коэффициентов Эло устроена вполне разумно и практически очень удобна. Лучшее ее подтверждение — достоверность прогноза.

В настоящее время коэффициенты Эло используются весьма широко, например, для присвоения международных шахматных званий. В зависимости от $K_т$ существует 15 категорий «трудности» турниров, для каждой из которых установлены свои процентные нормы, причем для присвоения звания международного мастера или международного гроссмейстера требуется достичь, соответственно, рейтинга 2400 или 2500.

Основываясь на своей системе, Эло проделал ряд любопытных подсчетов. В частности, он рассчитал коэффициенты всех крупнейших шахматистов со времен Морфи. В 1963 году он опубликовал результаты своих расчетов (табл. 2). Для каждого «классика» шахмат Эло вычислил средний рейтинг, характеризующий результат его выступлений на «наилучшем» отрезке длиной в пять лет. К 1963 году лидерами в списке Эло (рейтинг 2600 и выше) были 28 шахматистов.

За прошедшие 15 лет список можно было бы пополнить еще десятью-пятнадцатью гроссмейстерами экстра-класса, в том числе четырьмя последними чемпионами мира — Т. Петросяном, Б. Спасским, Р. Фишером и А. Карповым.

Наивысший рейтинг за всю историю шахмат имел после завоевания звания чемпиона мира Р. Фишер — 2780. Но поскольку по правилам ФИДЕ шахматист, не выступающий в соревнованиях три года подряд, не включается в так называемый рейтинг-лист ФИДЕ, в 1975 году его возглавил новый чемпион мира А. Карпов.

Задачи наших читателей

1. Найти пары чисел m, n, отвечающие закономерности

а) $$3=\frac{2\cdot3}{1\cdot2}=\frac{9\cdot10}{5\cdot6}=\ldots=\frac{m(m+1)}{n(n+1)}=\ldots=\frac{6887\cdot6888}{3976\cdot3977}=\ldots$$

б) $$2=\frac{3\cdot4}{2\cdot3}=\frac{20\cdot21}{14\cdot15}=\ldots=\frac{m(m+1)}{n(n+1)}=\ldots$$

С. Суслов
(г. Свердловск)

2. Если к двузначному числу приписать слева число на единицу большее, то полученное число будет полным квадратом. Найти исходное число.

И. Михалкович
(Минская обл.)

3. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}+\sqrt[3]{k^2+k-1}+\sqrt[3]{k^2+2k-2}}>\sqrt[3]{n+1}-1.$$

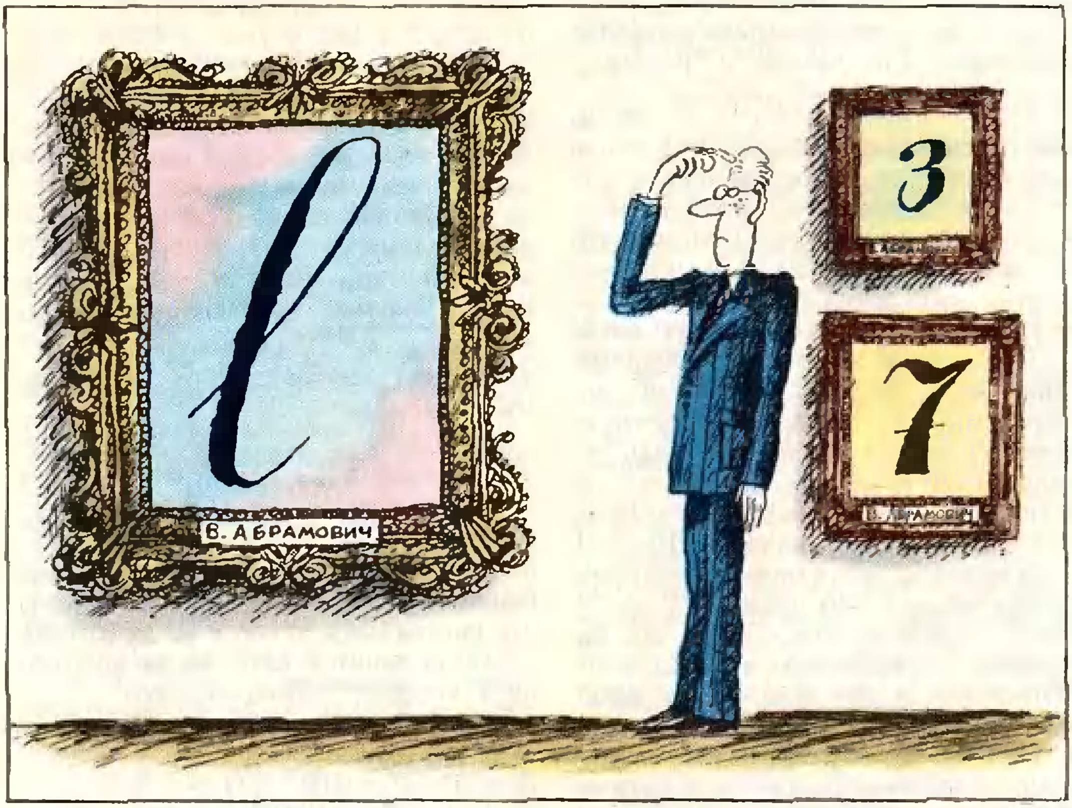
М. Махмудов
(г. Новый Узень)

4. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, AA_0, BB_0, CC_0 — его высоты, A_1, B_1 и C_1 — проекции точек A_0, B_0 и C_0 на прямые AO, BO и CO соответственно. Докажите, что тогда одна из величин

$$|A_0A_1|\cdot BC|^4, |B_0B_1|\cdot|AC|^4, |C_0C_1|\cdot|AB|^4$$

равна сумме двух других.

У. Алла
(г. Выру)



В. Абрамович

Признаки делимости на l

Время от времени на страницах различных изданий, в том числе «Кванта», вниманию читателей предлагаются все новые и новые, иногда очень экзотические, признаки делимости на различные числа.

Часто спрашивают: а как открывают новые признаки делимости? Неужели каждый раз проводят длинную серию опытов с числами, а потом, в случае удачи, пытаются доказать наиболее вероятное предположение?

Что же, такой путь для любящих «возиться» с числами не тягостен, а в случае удачи вполне окупается радостью пусть небольшого, но открытия.

И все же: не существует ли какого-нибудь общего способа придумывания признаков делимости?

Автора заинтересовал этот вопрос, и он попытался на него ответить. Что из этого получилось, читатель найдет в заметке.

Еще в четвертом классе вы узнали, что натуральное число тогда и только тогда делится на 3, когда делится на 3 сумма его цифр *).

Можно представить себе дело так: при обычной (десятичной!) записи числа

$$n = \overline{a_1a_2\ldots a_l} = \overline{a_1a_2\ldots a_l}^{(10)}$$

каждая цифра-кирпичик чем левее, тем весомее:

$$n = a_l + 10a_{l-1} + 10^2a_{l-2} + \\ + \ldots + 10^{l-1}a_1;$$

---

*) Точнее: сумма цифр его десятичной записи (записи в десятичной системе счисления). Скорее всего, натуральные числа вы воспринимали до сих пор только в десятичной системе счисления и даже не задумывались об этом. Ну, что ж! Можете еще некоторое время «не задумываться». Для чтения этой статьи вам скоро понадобится понимание того, что такое m-ичная система счисления (m — произвольное натуральное число, больше 1). О системах счисления вы можете прочитать в «Кванте», 1975, № 8, с. 59 или в брошюре С. В. Фомина «Системы счисления» (М., «Наука», 1975).

когда же мы применяем признак делимости на 3, мы складываем цифры-кирпичики как равные с равными:

$$n^* = a_t + a_{t-1} + a_{t-2} + \ldots + a_1,$$

как будто мы оказались в сказочной системе счисления с основанием $m = 1$.

Легко сообразить, что признак делимости на 3 так хорош потому, что мы записываем числа в десятичной системе счисления, а числа $10^k - 1$ ($k = 1, 2,$ [illegible], …) делятся на 3.

Продолжим наш поиск. Пока мы записываем числа в десятичной системе счисления, вряд ли можно придумать такой же хороший признак делимости на 7, потому что $10 - 1$ не делится на 7. А что, если вместо $10 - 1$ рассмотреть выражение $10x - 1$ и посмотреть, при каком наименьшем натуральным x оно разделится на 7? Легко выяснить, что $x = 5$. Что бы значило это найденное число $x = 5$? Вернемся еще раз к признаку делимости на 3. Мы говорили о том, что в признаке делимости на 3 «кирпичики» складываются как бы в системе счисления с основанием 1! Не служит ли 5 основанием той системы, которую нужно испробовать, чтобы получить желаемый признак делимости на 7?

Возьмем, например, делящееся на 7 число 21. Припишем его первой цифре, имеющей в десятичной системе вес $2 \cdot 10$, новый вес $2 \cdot 5$ и сложим его со второй цифрой: $2 \cdot 5 + 1 = 11$. Пока нас постигла неудача: 21 делится на 7, а полученное число — не делится. Но не будем сразу складывать оружие. Откуда мы, собственно, взяли, что нужно в 5 раз увеличивать вес именно первой цифры? Наверное, просто потому, что она была «весомее» в десятичной записи «испытуемого» числа. А что если сделать ее теперь, наоборот, более «легкой»? Подсчитаем: $2 + 1 \cdot 5 = 7$.

Но, может быть, это случайный результат?

Возьмем еще один делитель — 19. $10x - 1$ делится на 19 при $x = 2$. Проэкспериментируем, скажем, с делящимися на 19 числами 228 и 3781, увеличивая «вес» цифр в направлении слева — направо в формальной системе счисления с основанием 2 (мы употребили слово «формальной», так как степени двойки умножаются не обязательно на коэффициенты 0,1):

$$2 + 2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 8 = 38,$$

$$3 + 2 \cdot 7 + 2^2 \cdot 8 + 2^3 \cdot 1 = 57.$$

Оба числа делятся на 19!

Похоже, что закономерность в наших руках. Попробуем сформулировать общее утверждение.

Предположим, что мы ищем признак делимости на l. Пусть число q выбрано так, что $10q - 1$ делится на l. Возьмем произвольное число $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_t}^{(10)}$. Обозначим через n^* число, полученное из n по следующему правилу:

$$n^* = \overline{a_t a_{t-1} \ldots a_1}^{(q)},$$

то есть

$n^* = a_1 + qa_2 + q^2 a_3 + \ldots + q^{t-1} a_t$.

Наше предположение состоит в том, что натуральное число n тогда и только тогда делится на l, когда делится на l число n^*. Докажем его.

Подсчитаем сначала разность $R = q^{t-1} n - n^*$:

$$R = a_{t-1} q^{t-2} (10q - 1) + \\ + a_{t-2} q^{t-3} [(10q)^2 - 1] + \ldots + \\ + a_2 q [(10q)^{t-2} - 1] + \\ + a_1 [(10q)^{t-1} - 1].$$

По выбору числа q разность $10q - 1$ делится на l. Значит, делятся на l и разности $(10q)^2 - 1$, $(10q)^3 - 1$, … , $(10q)^{t-1} - 1$ (почему?). Следовательно, R делится на l. Но $n^* = q^{t-1} n - R$. Поэтому, если n делится на l, то и n^* делится на l.

Аналогично, делится на l и разность $S = 10^{t-1} n^* - n = a_2 10^{t-2} (10q - 1) + a_3 10^{t-3} [(10q)^2 - 1] + \ldots + a_{t-1} 10 [(10q)^{t-2} - 1] + a_t [(10q)^{t-1} - 1]$. Из $n = 10^{t-1} n^* - S$, вытекает, что если n^* делится на l, то и n делится на l.

Итак, n делится на l тогда и только тогда, когда на l делится n^*. Наше предположение доказано!

Легко заметить, что в доказательстве мы нигде не пользовались положительностью числа q. Поэтому q можно выбирать и отрицательным. Ясно, что q желательно выбирать наименьшим по модулю. Например, для $l = 7$ лучше вместо $q = 5$ брать $q = -2$.

Мы пока оставили в стороне естественный вопрос: а для любого ли l найдется такое q, что $10q - 1$ делится на l? Оказывается, такое q существует тогда и только тогда, когда 10 и l взаимно просты*). (Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно; «в одну сторону» оно доказывается очень легко, «в другую» — не очень.)

Легко обобщить наш признак делимости и на произвольные системы счисления.

Пусть

$$n = \overline{a_1a_2\ldots a_l}^{(r)},$$

то есть

$$n = a_l + ra_{l-1} + r^2a_{l-2} + \ldots + r^{l-1}a_1,$$

и пусть q таково, что $rq - 1$ делится на l. Построим по n число $n^* = \overline{a_la_{l-1}\ldots a_1}^{(q)}$. Тогда, чтобы n делилось на l, необходимо и достаточно, чтобы на l делилось n^*.

Доказывается это обобщенное утверждение абсолютно так же, как предыдущее.

Ответ на вопрос: когда существует требуемое q? — аналогичен: q существует тогда и только тогда, когда r и l взаимно просты.

Упражнения

1. Докажите, что наименьшее по модулю q такое, что $10q - 1$ делится на l, равно

$$q = \begin{cases} k, \text{ если } l = 10k - 1, \\ -k, \text{ если } l = 10k + 1, \\ 3k + 1, \text{ если } l = 10k + 3, \\ -3k + 1, \text{ если } l = 10k - 3. \end{cases}$$

(Этими случаями исчерпываются все возможные l, взаимно простые с 10.)

2. Докажите, что $11^{1977} + 1$ делится на 37.

3. Докажите, что $122^{132} - 1$ делится на 407.

4. Докажите, что если для натуральных q, n и r число $\frac{n^r + 1}{nq - 1}$ целое, то число $\frac{q^r + 1}{nq - 1}$ — тоже целое.

5. Для каких l общий признак делимости, сформулированный в конце статьи, эффективен (т. е. когда $n^* < n$)?

6. Докажите совместный признак делимости на 7, 11 и 13: для делимости числа $\overline{a_1a_2\ldots a_{3m}}^{(10)}$ на 7, 11, 13 необходимо и достаточно, чтобы число $\overline{a_1a_2a_3} - \overline{a_4a_5a_6} + \ldots + (-1)^{m-1}\overline{a_{3m-2}a_{3m-1}a_{3m}}$ делилось на 7, 11, 13.

Указание. Используйте, что $r_7^3 + 1$, $r_{11}^3 + 1$, $r_{13}^3 + 1$ делятся, соответственно, на 7, 11, 13 (r_7 — такое число, что $10r_7 - 1$ делится на 7, и т. д.).

7. Докажите совместный признак делимости на 3, 7, 19: для делимости числа $\overline{a_1a_2\ldots a_n}^{(10)}$ на 3, 7, 19 необходимо и достаточно, чтобы число $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-2}} + 4\overline{a_{n-1}a_n}$ делилось на 3, 7, 19.

8. Докажите, что для делимости числа n, r-ичная запись которого разбита на «блоки»: $n = \overline{M_1M_2\ldots M_l}^{(r)}$ (блок M_i содержит m_i цифр, $i = 1, 2, \ldots, l$), на l необходима и достаточна делимость на l числа

$$n^* = M_1 + M_2q^{m_2} + M_3q^{m_2+m_3} + \ldots + M_lq^{m_2+m_3+\ldots+m_l}.$$

---

*) То есть когда их наибольший общий делитель равен 1.

Задача, возникшая из каприза трех девочек

Три девочки гуляли со своими папами. Все шестеро подошли к небольшой реке и пожелали переправиться с одного берега на другой. В их распоряжении оказалась всего одна лодка без гребца, поднимающая только *двух* человек. Переправу было бы, разумеется, нетрудно осуществить, если бы девочки не заявили то ли из каприза, то ли из шалости, что ни одна из них не согласна ехать в лодке, или быть на берегу с одним или двумя чужими папами *без своего папы*. Девочки были маленькие, но не очень, так что каждая из них могла вести лодку самостоятельно.

Таким образом, неожиданно возникли дополнительные условия переправы, но ради забавы путники решили попытаться их выполнить. Как они действовали?

Веселая компания благополучно переправилась на противоположный берег реки и уселась отдыхать. Возник вопрос: можно ли при тех же условиях организовать переправу четырех пар? Очень скоро выяснилось, что при сохранении условий, выдвинутых девочками, переправу четырех пар можно было бы осуществить только при наличии лодки, поднимающей *трех* человек, причем всего лишь в 5 приемов.

Каким образом?

Развивая тему задачи еще дальше, наши путешественники нашли, что и на лодке, вмещающей только двух человек, можно осуществить переправу с одного берега на другой четырех девочек с их папами, если посреди реки есть остров, на котором можно делать промежуточную остановку и высаживаться. В этом случае для окончательной переправы требуется совершить не менее *десяти* переездов.

Найдите способ такой переправы.

Б. Кордемский

И. Половинка

Опыты с синтетическими пленками

В этой статье мы хотим рассказать о нескольких опытах по электростатике (так принято называть раздел физики, в котором рассматриваются взаимодействия покоящихся зарядов).
Опыты не требуют никакого специального оборудования, их можно поставить как на занятиях физического кружка, так и в домашних условиях.
Не спешите сделать все опыты сразу. Тщательно готовьтесь к каждому опыту, старайтесь объяснить все полученные результаты. Желаем вам успехов!

Для опытов удобнее всего воспользоваться разного рода синтетическими пленками. Например, можно взять рентгеновские пленки или фотопленки, предварительно удалив с них эмульсию (растворив ее в теплой воде), хотя это и не обязательно. В специализированных театральных магазинах можно купить разноцветные светофильтры на триацетатцеллюлозной основе. Можно использовать также телефильтры или полиэтиленовые пленки.

Все эти пленки при трении электризуются, приобретая положительные заряды. Для получения отрицательных зарядов лучше всего подходят пластмассовые пленки, изготовленные, например, из пластмассовых папок для бумаг.

Размеры пленок могут быть, конечно, разными; мы в своих опытах использовали пленки размером 70 × 300 мм.

Затем нужно изготовить несколько электростатических маятников. Возьмите серебряную обертку от шоколадной конфеты или кусок конденсаторной фольги размером 30 × 40 мм. Накрутив фольгу на карандаш, сделайте гильзу и привяжите к ней шелковую нитку.

Вам понадобятся также неоновые лампочки (МН-3 или МН-5) и электрометр.

Советуем вам проводить опыты в такой последовательности:

1. Исследуйте, как электризуются имеющиеся у вас пленки. Для этого натирайте пленки разными материалами (лучше мягкими, чтобы не поцарапать пленки): сухой рукой, бумагой, различными тканями. Используйте при этом разный подстил: дерево, стекло, газетную бумагу, клеенку, шерстяную или синтетическую ткани.

По отклонению маятника-гильзы или стрелки электрометра установите, в каком случае эффект наибольший.

Как бы вы объяснили преимущество пленок перед эбонитовыми и стеклянными палочками?

2. Определите знак заряда, появившегося на пленке. На занятиях кружка это можно сделать с помощью эбонитовой палочки, которая заряжается отрицательно, и электрометра.

А как это сделать в домашних условиях?

Исследуйте распределение заряда на пленках с помощью неоновой лампочки. Держа лампочку пальцами за ее баллон и проводя по пленке электродом (пленку нужно отделить от поверхности стола), можно наблюдать загорание лампочки в отдельных местах.

А почему неоновая лампочка не фиксирует скопление электрических зарядов, если наэлектризованная пленка лежит на поверхности стола?

3. Приложите пленку к вертикальной поверхности (стене, классной доске, стеклу) и проведите по ней несколько раз сухой рукой — пленка надежно прилипнет к поверхности. Если отклонить пленку сверху или снизу, а затем отпустить, то она снова притянется к поверхности.

Почему так происходит?

4. Наэлектризуйте две одинаковые пленки, приподнимите их, а за-

тем положите одну пленку на другую. При освобождении верхней пленки ее сильно отбросит в сторону.

Почему?

5. Положите на стол две одинаковые пленки и наэлектризуйте их трением. Затем возьмите их за концы и соедините — пленки разойдутся на значительное расстояние (рис. 1).

Почему? Имеет ли значение, какими сторонами вы сближаете пленки?

Положите друг на друга две-три пленки из одинакового материала и верхнюю натрите рукой. Затем поочередно снимайте их и соединяйте концами — пленки расходятся так же, как и в предыдущем опыте (рис. 2).

Как в этом случае происходит электризация пленок?

6. Поднесите заряженную пленку к работающему транзисторному приемнику — вы услышите треск, характерный для электрического разряда.

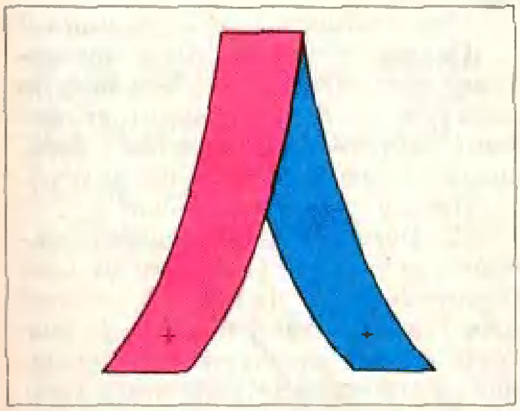


Рис. 1.

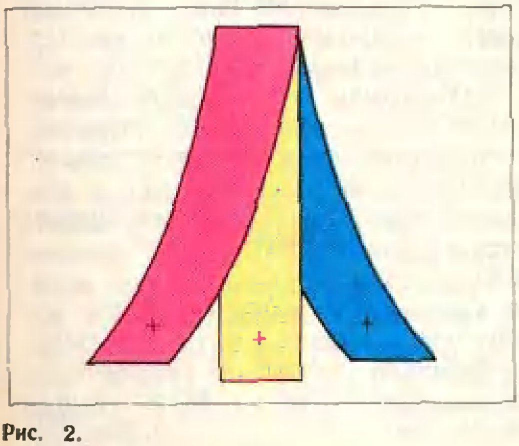


Рис. 2.

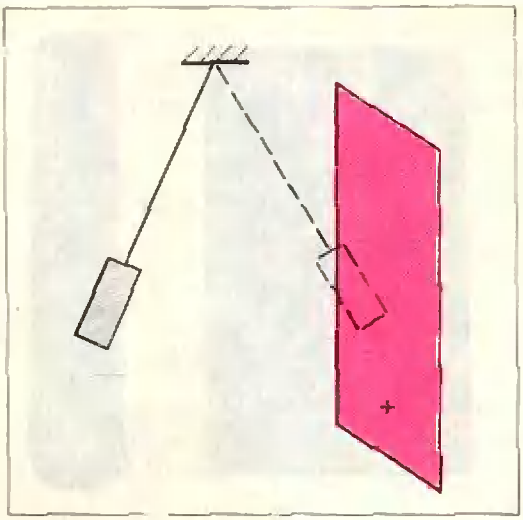


Рис. 3.

На каких волнах треск наибольший? В каком диапазоне длин волн помехи во время грозы будут наибольшими?

Между пленкой и приемником поставьте металлический лист размером чуть больше пленки — помех не наблюдается.

Объясните, почему. Какое практическое значение имеет описанное явление экранирования? Почему?

7. Плотно приложите пленку к экрану работающего телевизора и подержите ее в таком положении несколько секунд — пленка прилипнет к экрану; значит, она наэлектризована без трения.

Каким образом? Зарядом какого знака?

8. Наэлектризованную пленку поднесите к маятнику-гильзе. Вы увидите, что маятник сначала притянется к пленке, а затем резко оттолкнется от нее (рис. 3). Если пленку поднести к маятнику снизу, то он будет парить над пленкой.

Почему так происходит? А если пленку поднести снизу к двум таким маятникам? Что будет, если к заряженной пленке приблизить маятник, изготовленный из диэлектрика? Как результаты опыта связаны со строением проводников и непроводников электричества?

9. Возьмите две одинаковые наэлектризованные пленки и поочередно подносите их на одинаковое расстояние к электрометру — стрелка в

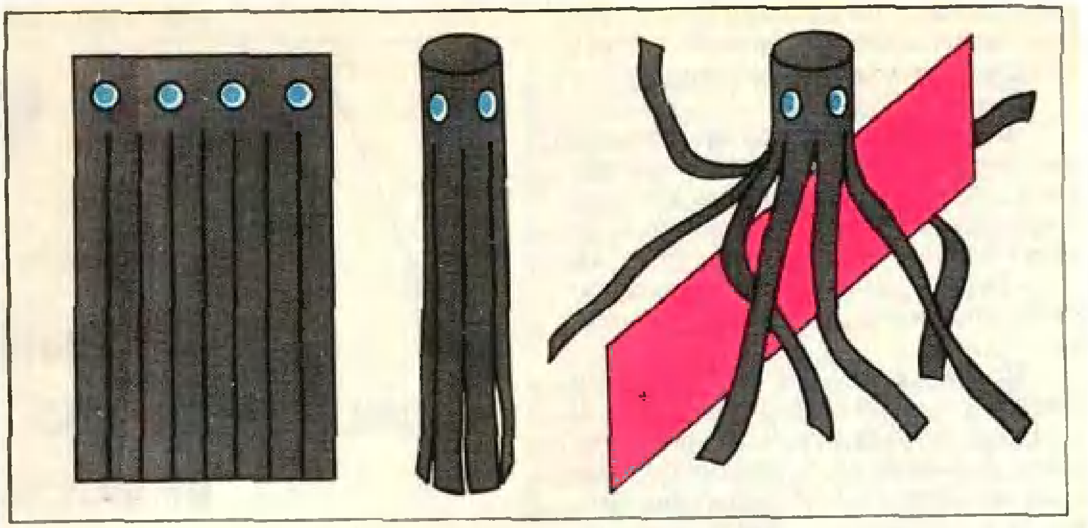


Рис. 4.

каждом отдельном случае отклоняется на определенный угол. Затем поднесите к электрометру обе пленки, но с противоположных сторон — угол отклонения стрелки прибора увеличится. Этот опыт наглядно демонстрирует одно из важных свойств электрических полей — наложение (или, как говорят физики, суперпозицию) электрических полей.

Поочередно поднесите к электрометру две разноименно заряженные пленки — стрелка будет отклоняться так же, как и в предыдущем опыте. Теперь одновременно поднесите обе разноименно заряженные пленки.

Что вы увидите в этом случае? Почему?

10. Наэлектризованную пленку приблизьте к тонкой струе воды, вытекающей из водопроводного крана.

Что вы увидите?

11. Очень красив опыт с «осьминогом». Возьмите лист папиросной бумаги 70×160 мм и разрежьте его почти до конца на восемь полосок, заверните лист и склейте его вверху (рис. 4). Наэлектризуйте разноименными зарядами две пленки. На одну из них положите голову «осьминога».

Что случится с его щупальцами?

Подведите к щупальцам «осьминога» противоположно заряженную пленку и соответствующими движениями заставьте «осьминога» переползти с одной пленки на другую.

Почему так происходит?

12. Возьмите две одноименно заряженные пленки. Положите на стол маятник-гильзу (или сложенный вдвое газетный лист) и сверху поднесите к нему пленку — нить (половина газетного листа) стремится установиться вертикально. Если поднести и другую заряженную пленку, эффект усиливается. Нить (газетный лист) послушно следует за совместными движениями пленок.

Объясните наблюдаемое явление.

Задачи наших читателей

1. *Докажите неравенство* ($n \geqslant 2$)

$$\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}+\frac{1}{\sqrt[n-1]{n!}} \leqslant 1.$$

А.—В. Хусаинов
(с. Киров—Юрт Чечено-Ингушской АССР)

2. *Докажите*, что если натуральное число n, не меньшее 17, является простым, то число

$$N=\frac{n^2-1}{24}$$

— целое, но составное.

И. Суев
(г. Кишинев)

Л. Курляндчик, А. Лисицкий

Суммы и произведения

Искусством приводить длинную сумму или громоздкое произведение к простому виду, угадывать, когда такое упрощение возможно, придумывать и доказывать равенства вроде следующих:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+99\cdot 100=\frac{99\cdot 100\cdot 101}{3},$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+50^2=\frac{101\,(101^2-1)}{24},$$

$$(1\cdot 2\cdot 2^2)(1\cdot 2\cdot 3\cdot 3^3)(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4^4)\dots(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 9\cdot 9^9)=(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 9)^{10},$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10\cdot 9}-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 8}+\dots+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 10}{10\cdot 9\cdot 8\cdot\ldots\cdot 1}=\frac{11}{12}\cdot 2,$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10\cdot 9}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 8}+\dots+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 10}{10\cdot 9\cdot 8\cdot\ldots\cdot 1}=\frac{11}{2^{11}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\dots+\frac{2^{11}}{11}\right),$$

овладеть далеко не просто. Тут требуются большой опыт, интуиция, и, как в каждом искусстве, умение свободно применять различные «технические» приемы. Мы продемонстрируем некоторые из таких приемов на ряде примеров; среди них — и совсем простые упражнения, и трудные задачи (в числе последних — задачи М434 и М470 из Задачника «Кванта»).

Мы записываем формулы, как правило, коротко, с помощью обозначений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+\dots+a_n,$$

$$\prod_{k=1}^{n} b_k=b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n,$$

$$n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n.$$

Советуем тем, кто еще не научился ими пользоваться, расписывать выкладки более подробно.

1. Остаются крайние

Этот заголовок объясняется следующим очевидным равенством:

$$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\dots+(a_n-a_{n-1})+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a_1 \qquad (1)$$

или

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1, \qquad (1')$$

из которого можно, выбирая различным образом последовательность (a_k), получить много отнюдь не очевидных равенств.

Пример 1. Положив $a_k=-\frac{1}{k}$, получаем $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$; трудно найти задачник по алгебре, где бы не встречался этот пример.

Пример 2. Положим $a_k=k(k-1)d/2$. Поскольку $a_{k+1}-a_k=kd$, равенство (1) принимает вид $\sum_{k=1}^{n}kd=(n+1)\cdot n\cdot d/2$. Добавив к каждому члену суммы слева еще по $a-d$, а к сумме справа $n(a-d)$, получаем известную формулу для суммы n членов арифметической прогрессии: $a+(a+d)+\dots+(a+(n-1)d)=n(a-d)+(n+1)nd/2=na+n(n-1)d/2$.

Упражнение 1. Возьмите в (1) $a_k=(2k-1)^3/24$ и получите формулу для $\sum_{k=1}^{n}k^2$.

Пример 3. Пусть m — натуральное число. Положим $a_k = \frac{1}{(m+2)} \times (k-1)k(k+1)\ \ldots\ (k+m)$. Тогда $a_{k+1} - a_k = \frac{1}{m+2} k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+1+m) - \frac{1}{m+2}(k-1)k\ldots(k+m) = k(k+1)\ldots(k+m)$. В этом случае равенство (1) запишется так: $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+m) = \frac{1}{m+2} n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m+1)$.

Равенство (1) можно использовать и по-другому. Пусть нам надо доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = g(n). \qquad (2)$$

Попробуем доказать равенство

$$g(k) - g(k-1) = f(k). \qquad (3)$$

Если нам это удастся, то будет доказано и (2). В самом деле, рассмотрим вспомогательную последовательность

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_{k+1} = g(k). \end{cases}$$

Для этой последовательности равенство (1) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} [g(k) - g(k-1)] = g(n),$$

что, ввиду (3), равносильно (2).

Докажем, например, таким способом равенство

$$\sum_{k=1}^{n} C_{l+k-1}^{l} = C_{l+n}^{l+1}. \qquad (4)$$

В соответствии со сказанным для этого достаточно проверить равенство $C_{l+n}^{l+1} - C_{l+n-1}^{l+1} = C_{l+n-1}^{l}$ или $C_{l+n-1}^{l} + C_{l+n-1}^{l+1} = C_{l+n}^{l+1}$, вытекающее из известного тождества $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ («Алгебра и начала анализа 9», п. 8). В п. 3 мы докажем тождество (4) другим способом.

Все вышесказанное переносится и на произведения. Напишем, прежде всего, мультипликативный аналог равенства (1):

$$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_1} \qquad (5)$$

или

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1}. \qquad (5')$$

Это равенство можно использовать, подставляя в него произвольные последовательности (a_k) (с ненулевыми членами) и для доказательства заданных тождеств.

Докажем, например, что*)

$$\prod_{k=1}^{n} (2^k - 1)!! = \frac{2\cdot(2^n)!}{2^{2^n}}, \qquad (6)$$

для чего проверим равенство

$$\frac{2\cdot(2^n)!}{2^{2^n}} : \frac{2\cdot(2^{n-1})!}{2^{2^{n-1}}} = (2^n - 1)!! \qquad (7)$$

или

$$\frac{(2^n)!}{(2^{n-1})!\cdot 2^{2^{n-1}}} = (2^n - 1)!!. \qquad (7')$$

Равенство (7′) легко доказывается при помощи двух очевидных тождеств:

$$(2t-1)!! = \frac{(2t)!}{(2t)!!},$$

$$(2t)!! = 2^t\cdot t!.$$

Равенство (6) можно также доказать, прологарифмировав его и перейдя к сумме.

Из (6) можно вывести, что в разложение числа $(2^n)!$ на простые множители двойка входит ровно $2^n - 1$ раз (подумайте, почему это так).

Итак, рассмотренный прием позволяет не только получать новые равенства, но и доказывать уже заданные.

Упражнения

Докажите, что:

2. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \frac{1}{1-x} \times \frac{x - x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$.

---

*) Через $n!!$ обозначается произведение натуральных чисел от 1 до n, имеющих одинаковую четность с n. Например, $8!! = 2\cdot4\cdot6\cdot8$, $9!! = 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9$.

4. $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1.$

5. $\prod\limits_{k=1}^{n} k^k\cdot k! = (n!)^{n+1}.$

6. $a_1 + (a_1+1)\,a_2 + (a_1+1)\,(a_2+1)\times\times a + \ldots + (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_{n-1}+1)\times\times a_n = (a_1+1)\,(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1) - 1$

7. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)\,(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+m)}\right).$$

8. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k\cdot k!}{(x+1)\,(2x+1)\cdot\ldots\cdot(kx+1)} = \frac{1}{x-1}\,\frac{x^{n+1}\,(n+1)!}{(x+1)\cdot\ldots\cdot(nx+1)} + \frac{x}{1-x}.$$

9. $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_0\cdot p_1\cdot\ldots\cdot p_k q_{k+1}}{(p_1+q_1)\cdot\ldots\cdot(p_{k+1}+q_{k+1})} = 1 - \frac{p_1 p_2\cdot\ldots\cdot p_n}{(p_1+q_1)\cdot\ldots\cdot(p_n+q_n)}.$$

(Здесь (p_k) и (q_k) — две последовательности и $p_0 = 1$.)

К сожалению, указанный способ годится только в том случае, когда в сумме $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ слагаемые b_k не зависят от n. В следующем пункте мы будем доказывать равенства, в которых слагаемые зависят от n.

2. Метод «туда-назад»

Название этого метода (но не сам метод) — выдумка авторов. Историки математики утверждают, что именно с его помощью маленький Гаусс удивил своего школьного учителя, быстро найдя сумму натуральных чисел от 1 до 100. Покажем применение метода «туда-назад» на примерах.

Докажем, что для нечетного n

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sqrt{C_n^k} = 0.$$

Запишем сумму S_n двумя способами

$$S_n = \sqrt{C_n^0} - \sqrt{C_n^1} + \sqrt{C_n^2} - \ldots + \sqrt{C_n^{n-1}} - \sqrt{C_n^n} \quad \text{(туда)},$$

$$S_n \quad -\sqrt{C_n^n} + \sqrt{C_n^{n-1}} - \sqrt{C_n^{n-2}} + \ldots - \sqrt{C_n^1} + \sqrt{C_n^0} \quad \text{(назад)}.$$

В нашей сумме перед $\sqrt{C_n^n}$ знак минус, потому что n нечетно. Сложим два полученных выражения:

$$2S_n = \left(\sqrt{C_n^0} - \sqrt{C_n^n}\right) + \left(-\sqrt{C_n^1} + \sqrt{C_n^{n-1}}\right) + \ldots + \left(-\sqrt{C_n^n} + \sqrt{C_n^0}\right).$$

Легко сообразить, что в каждой скобке стоит нуль, так как $C_n^m = C_n^{n-m}$. Поэтому $2S_n = 0$, откуда $S_n = 0$.

Еще пример:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\left(C_{2n+1}^k\right)^2} = 0.$$

Действуем аналогично:

$$S_n = \frac{1}{\left(C_{2n+1}^0\right)^2} - \frac{1}{\left(C_{2n+1}^1\right)^2} + \ldots - \frac{1}{\left(C_{2n+1}^{2n+1}\right)^2} \quad \text{(туда)},$$

$$S_n = -\frac{1}{\left(C_{2n+1}^{2n+1}\right)^2} + \frac{1}{\left(C_{2n+1}^{2n}\right)^2} - \ldots + \frac{1}{\left(C_{2n+1}^0\right)^2} \quad \text{(назад)}.$$

Складывая эти выражения и учитывая, что $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}$, получаем $2S_n = 0$. Отсюда $S_n = 0$.

А вот более сложный, но и более интересный пример на эту же тему:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{C_n^k} = \frac{n+1}{n+2}\,(1 + (-1)^n). \quad (8)$$

Решить эту задачу так же просто, как две предыдущие, не удается. Обозначим $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{C_n^k}$ через S_n. Если n нечетно, вы без труда докажете, что $S_n = 0$. Случай же четного n сведем к нечетному. Проследите внимательно, как это делается.

Обозначим $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (k+1)}{C_n^k}$ через T_n. Запишем T_n двумя способами:

$$T_n = \frac{1}{C_n^0} - \frac{2}{C_n^1} + \ldots + \frac{n+1}{C_n^n} \text{ (туда)},$$

$$T_n = \frac{n+1}{C_n^n} - \frac{n}{C_n^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{C_n^0} \text{ (назад)}.$$

Складывая, получаем $2T_n = (n+2) \times \left(\frac{1}{C_n^0} - \frac{1}{C_n^1} + \ldots + \frac{1}{C_n^n}\right) = (n+2) \times S_n$. С другой стороны, $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (k+1)\, k!\, (n-k)!}{n!} = (n+1) \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{C_{n+1}^{k+1}} = (n+1)(1 - S_{n+1})$. Но так как $S_{n+1} = 0$ ($n+1$ нечетно), $T_n = n+1$. Мы уже доказали, что $S_n = \frac{2}{n+2} T_n$. Значит, $S_n = \frac{2(n+1)}{(n+2)}$. Осталось заметить, что $\frac{n+1}{n+2}(1 + (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ нечетно}, \\ \frac{2(n+1)}{n+2}, & n \text{ четно}. \end{cases}$

Доказательство равенства

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}. \qquad (9)$$

сложнее всех предыдущих, но оно и самое поучительное.

Введем следующие обозначения:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = D_n; \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{C_n^k} = E_n;$$

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} = F_n.$$

Сначала по методу «туда-назад» дважды запишем сумму

$$E_n = \frac{1}{C_n^0} + \frac{2}{C_n^1} + \ldots + \frac{n+1}{C_n^n} \text{ (туда)},$$

$$E_n = \frac{n+1}{C_n^n} + \frac{n}{C_n^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{C_n^0} \text{ (назад)}.$$

Сложим эти равенства: $2E_n = (n+2) \times \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = (n+2) D_n$. Значит, $D_n = \frac{2}{n+2} E_n$. Теперь, проделав выкладки, аналогичные тем, которые мы провели при решении предыдущей задачи, выразим E_n через D_{n+1}. А именно, $E_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k+1}{C_n^k} = (n+1) \times \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} = (n+1)(D_{n+1} - 1)$, и мы можем выразить D_{n+1} через D_n: $D_n = \frac{2}{n+2} E_n = \frac{2}{n+2}(n+1)(D_{n+1} - 1)$, откуда

$$D_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)} D_n.$$

Теперь, пользуясь методом математической индукции, докажем, что $D_n = F_n$ при всех целых $n \geqslant 0$. Легко видеть, что $D_0 = 1$ и $F_0 = 1$. Предположим, что $D_s = F_s$. Тогда $D_{s+1} = 1 + \frac{s+2}{2(s+1)} D_s = 1 + \frac{s+2}{2(s+1)} F_s = 1 + \frac{s+2}{2(s+1)} \cdot \frac{s+1}{2^{s+1}} \sum\limits_{k=1}^{s+1} \frac{2^k}{k} = 1 + \frac{s+2}{2^{s+2}} \sum\limits_{k=1}^{s+1} \frac{2^k}{k} = \frac{s+2}{2^{s+2}} \sum\limits_{k=1}^{s+2} \frac{2^k}{k} = F_{s+1}$. Значит, $D_n = F_n$ при всех целых $n \geqslant 0$. Задача решена.

Доказав равенства (8) и (9), мы решили задачу М470 («Квант», 1977, № 10). Равенство (9) позволяет предложить новое решение задачи М434 («Квант», 1977, № 12).

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} = \frac{p_n}{q_n}$, где p_n, q_n взаимно просты. Обозначим через $\nu(n)$ наибольшую степень числа 2, на которую делится p_n. Докажем, что $\nu(n) \geqslant \frac{n-3}{2}$.

Из (9) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Поэтому $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$ или $\frac{p_n}{q_n} = \frac{2^n}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k}$. Отсюда $\frac{p_n}{q_n} = \frac{2^n}{n!} \times ((n-1)! + 1!(n-2)! + 2!(n-3)! + \ldots + (n-1)!)$. В $n!$ число 2 входит в степени $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \ldots \leqslant$

$\leqslant \frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\ldots<n$. В $k!\,(n-k-1)!$ оно входит в степени, большей чем $\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{n-k-1}{2}\right]\geqslant\frac{k}{2}+\frac{n-k-1}{2}-1=\frac{n-3}{2}$. Значит $\nu(n)\geqslant\frac{n-3}{2}$.

Упражнения

Докажите равенства:

10. $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k = n\cdot 2^{n-1}$.

11. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3C_n^k = \frac{3}{2}\,n\cdot\sum\limits_{k=0}^{n} k^2C_n^k - n^3 2^{n-2}$.

12. $\sum\limits_{k=0}^{n} k\left(C_n^k\right)^2 = \frac{n}{2}\,C_{2n}^n$.

13. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3\left(C_n^k\right)^2 = -\frac{n^3}{4}\,C_{2n}^n + \frac{3}{2}\times n\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\left(C_n^k\right)^2 = n^3\left(\frac{3}{2}\,C_{2n-2}^{n-1} - \frac{1}{4}\,C_{2n}^n\right)$.

Ну, а как же действовать, если сумму надо вычислить? Иногда это удается сделать методом «туда-назад». Но есть и другие методы.

3. Сравнение коэффициентов

Этот метод — один из наиболее плодотворных. Мы надеемся, что вы по достоинству оцените его красоту и изящество. Основой метода является

Теорема. *Если для двух многочленов*

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m$$

$f(d)=g(d)$ *при всех* $d\in\mathbf{R}$, *то* $m=n$ *и* $b_0=a_0,\ b_1=a_1,\ldots,\ b_m=a_n$.

Эта теорема мгновенно получается, если предварительно будет доказана

Лемма. *Если для многочлена*

$$h(x)=C_0x^l+C_1x^{l-1}+\ldots+C_{l-1}x+C_l$$

$h(d)=0$ *при любом* $d\in\mathbf{R}$, *то* $C_0=C_1=\ldots=C_{l-1}=C_l=0$.

Доказательство. Применим индукцию по l. При $l=0$ утверждение очевидно. Предположим теперь, что наше утверждение верно при всех $l\leqslant s-1$ *). Докажем, что тогда оно верно и для $l=s$. Пусть

$$h(x)=C_0x^s+C_1x^{s-1}+\ldots+C_{s-1}x+C_s.$$

Тогда $2^sh(d)-h(2d)=0$ при любом $d\in\mathbf{R}$, а степень многочлена $2^sh(x)-h(2x)$ меньше s. Поэтому по предположению индукции все его коэффициенты равны нулю, т. е.

$$(2^s-2^{s-1})\,C_1=0,$$
$$(2^s-2^{s-2})\,C_2=0,\ \ldots$$
$$\ldots,(2^s-1)\,C_s=0.$$

Следовательно, $C_1=C_2=\ldots=C_s=0$. Тогда, конечно, и $C_0=0$. Лемма доказана.

В качестве первой иллюстрации установим еще раз равенство (4). Рассмотрим многочлен

$$f(x)=1+(1+x)+(1+x)^2+\ldots+(1+x)^{m-1}.$$

Коэффициент при x^l в этом многочлене по формуле Ньютона («Алгебра и начала анализа 9», п. 9) равен

$$C_l^l+C_{l+1}^l+\ldots+C_{m-1}^l=\sum_{k=1}^{m-l}C_{l+k-1}^l.$$

С другой стороны, последовательность $1,(1+x),(1+x)^2,\ \ldots,\ (1+x)^{m-1}$ — это геометрическая прогрессия. Поэтому

$$f(x)=\frac{(1+x)^m-1}{(1+x)-1}=\frac{1}{x}[(1+x)^m-1].$$

Снова применяя формулу Ньютона, получаем

$$f(x)=\frac{1}{x}[(1+x)^m-1]=\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{m}C_m^kx^k=\sum_{k=1}^{m}C_m^kx^{k-1}.$$

Значит, коэффициент при x^l равен C_m^{l+1}. По теореме получаем (4).

Найдем $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$. Рассмотрим

---

*) Это — форма метода математической индукции, отличная от той, которая изложена в учебнике. Она называется *возвратной индукцией*.

многочлен

$$f(x) = (1+x)^n (x+1)^n = \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n\right) \times \left(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^n\right).$$

Коэффициент при x^n в этом произведении равен, очевидно, $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$. С другой стороны, $f(x) = (1+x)^{2n}$. Коэффициент при x^n в нем равен C_{2n}^n. По теореме получаем, что $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$.

Теперь найдем $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \left(C_n^k\right)^2$.

При решении предыдущей задачи мы рассматривали многочлен $f(x) = (1+x)^n (x+1)^n$. Здесь же, по-видимому, надо взять похожий многочлен, но чтобы в нем знаки у коэффициентов чередовались. Давайте попробуем рассмотреть многочлен $g(x) = (1+x)^n (x-1)^n = \left(C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n\right)\left(C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n C_n^n\right)$.

Коэффициент при x^n в этом произведении равен $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \left(C_n^k\right)^2$. С другой стороны, $g(x) = (1+x)^n (x-1)^n = (-1)^n (1-x^2)^n = (-1)^n \times \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{2k}$. В этой сумме коэффициенты при нечетных степенях x равны 0. Поэтому, если n нечетно, то коэффициент при x^n равен 0. Если же n четно, то коэффициент при x^n равен $(-1)^{n+\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}$. Итак, $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \left(C_n^k\right)^2 =$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ нечетно,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}, & n \text{ четно.} \end{cases}$$

Упражнения

14. Найдите сумму $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$. (Ответ: $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.)

15. Обозначим через B_n^k коэффициент при x^k в многочлене $(1+x+x^2)^n$. Найдите сумму $\sum\limits_{k=0}^{2n} \left(B_n^k\right)^2$. (Ответ: B_{2n}^{2n}.)

На первый взгляд этот метод выглядит очень искусственным, потому что кажется непонятным, как же научиться выбирать нужный многочлен. К сожалению, в этой статье мы не можем более подробно останавливаться на этом вопросе.

Тем не менее мы думаем, что, решив предложенные упражнения, вы сможете самостоятельно решать аналогичные задачи.

4. Преобразование Абеля

Пусть нам дана сумма $S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — две последовательности. Обозначим суммы b_1, $b_1 + b_2, \ldots, b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, соответственно, через $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Тогда $b_1 = B_1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$ при $k > 1$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$ можно преобразовать так:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \ldots + a_n (B_n - B_{n-1}) = (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_n B_n = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n. \tag{10}$$

Это преобразование называют *преобразованием Абеля* (о замечательном норвежском математике Нильсе Хенрике Абеле см. в «Кванте» № 5 за 1976 год).

Воспользовавшись преобразованием Абеля, найдем сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} kq^{k-1}$.

Положим в тождестве (10) $a_1 = 1$, $a_2 = 2, \ldots, a_n = n$; $b_1 = 1$, $b_2 = q, \ldots, b_n = q^{n-1}$. Тогда $B_k = \frac{q^k - 1}{q-1}$ и $a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = \ldots = a_{n-1} - a_n = -1$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1) \frac{q^k - 1}{q-1} +$$

$$+n\,\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{-1}{q-1}\sum_{k=0}^{n-1}(q^k-1)+$$

$$+n\,\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{-1}{q-1}\left(\frac{q^n-1}{q-1}-n\right)+$$

$$+n\,\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{nq^n}{q-1}-\frac{q^n-1}{(q-1)^2}.$$

Упражнения

Преобразованием Абеля найдите:

16. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2q^{k-1}$.

17. $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot\sin kx$.

18. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\cdot\cos kx$.

Докажите равенства:

19. $$\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k k}{(C_{2n-1}^k)^2}=$$

$$=\frac{4n^2}{2n+1}\left(1-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{(C_{2n}^k)^2}\right).$$

20. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(C_n^k)^3=$$

$$=\begin{cases}0, \text{ если } n=2l+1,\\ (-1)^l\dfrac{(3l)!}{(l!)^3}, \text{ если } n=2l.\end{cases}$$

21. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\,(C_n^k)^3=$$

$$=\begin{cases}(-1)^l l\,\dfrac{(3l)!}{(l!)^3}, & \text{если } n=2l,\\ (-1)^{l+1}\dfrac{(3l+1)!}{(l!)^3}, & \text{если } n=2l+1.\end{cases}$$

22. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2(C_n^k)^3=\quad.$$

$$=\begin{cases}(-1)^l\cdot\dfrac{2}{3}\,l^2\dfrac{(3l)!}{(l!)^3}, \text{ если } n=2l,\\ (-1)^{l+1}(2l+1)\,\dfrac{(3t+1)!}{(l)^3},\\ \text{если } n=2t+1.\end{cases}$$

23. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью d. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\frac{a_{k+1}}{C_n^k}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n+1}{n+2}(a_1+a_{n+1}), & \text{если } n \text{ четно},\\ -\dfrac{(n+1)^2}{n+3}\,d, & \text{если } n \text{ нечетно}.\end{cases}$$

Законный вопрос

В планиметрии доказываются следующие две взаимообратные теоремы:

Теорема 1. *Против равных углов треугольника всегда лежат равные стороны.*

Теорема 2. *Против равных сторон треугольника всегда лежат равные углы.*

Между тем, в практических применениях геометрии не имеет смысла говорить о строгом (точном) равенстве сторон или углов — там приходится иметь дело лишь с приближенно равными геометрическими величинами. Это обстоятельство подсказывает естественный вопрос, сохраняют ли силу приведенные теоремы после нижеследующей их модификации:

Теорема 1′. *Против почти равных углов треугольника всегда лежат и почти равные стороны.*

Теорема 2″. *Против почти равных сторон треугольника всегда лежат и почти равные углы.*

Однако фигурирующее в этих двух формулировках слово «почти» в наше время чуждо языку математика *). Итак, прежде чем пытаться ответить на поставленный вопрос, следует придать вполне точный смысл сформулированным теоремам, освободив их от неопределенного понятия «почти». (Не исключено, что сделать это можно разными способами, например, с помощью понятия предела или как-либо иначе.)

Предлагаем нашим читателям сделать это.

Ю. Гайдук
(г. Харьков)

---

*) Оно употребляется сейчас лишь как составная часть немногих математических терминов, например, «почти все», «почти всюду», «почти период», но в каждом случае в строго определенном смысле.

задачник кванта

Задачи

M526—M530; Ф538—Ф542

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто её предложил. Разумеется, не все задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 декабря 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант», Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете (например: «М526, М527» или «Ф538»). Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Решения задач из разных номеров журнала также присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M526. а) Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна

$$S = \frac{\operatorname{tg}\varphi\,|a^2 - b^2 + c^2 - d^2|}{4},$$

где a, b, c и d — длины последовательных сторон четырехугольника, φ — величина угла между его диагоналями, $\varphi \neq 90°$.

б) *Можно ли найти площадь S, зная a, b, c и d, если $\varphi = 90°$?*

У. Алла

M527. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные числа, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$. Докажите, что величина

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n - \\ - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n - x_nx_1$$

не превосходит

а) 1 при $n=3$;
б) 2 при $n=4$;
в)* $[n/2]$ при любом $n \geqslant 3$.

В. Батырев, ученик 10 класса

M528. На каждой клетке шахматной доски стоит по фишке (рис. 1). Фишки нужно переставить так, чтобы расстояние между каждой парой фишек не уменьшилось по сравнению с расстоянием между ними при первоначальном расположении. Сколькими способами это можно сделать? (Расстоянием между фишками считается расстояние между центрами клеток, которые они занимают.)

М. Бершадский

M529. а) Многоугольник M' — образ выпуклого многоугольника M при гомотетии с коэффициентом $k = -{}^1/_2$. Докажите, что существует параллельный перенос T такой, что $T(M') \subseteq M$.

б) При каких коэффициентах гомотетии $k < 0$ верно аналогичное утверждение для выпуклого многогранника M в пространстве?

Н. Нецветаев

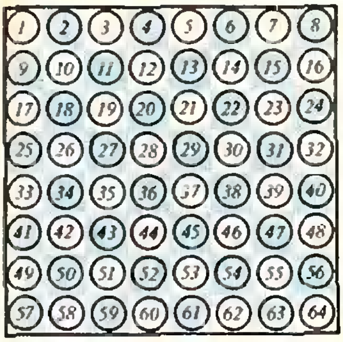


Рис. 1.

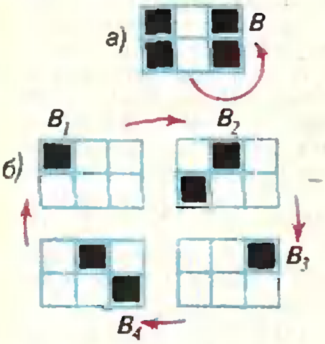


Рис. 2.

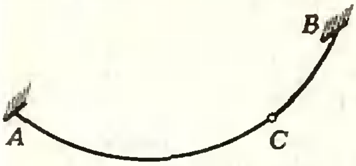


Рис. 3.

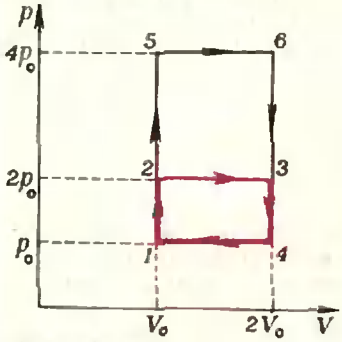


Рис. 4.

М530. На прямоугольном листе бумаги в клетку некоторые клетки закрашены в черный цвет. Затем происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: клетка, имевшая четное число черных соседей, становится белой, а имевшая нечетное число черных соседей — черной. (Соседями считаются клетки, имеющие общую сторону.)

а) Докажите, что если множество B черных клеток при перекрашивании не изменяется (рис. 2, *а*) то в B четное число клеток.

б) Пусть при перекрашивании множество B_1 черных клеток переходит в B_2, B_2 — в B_3, . . ., B_{r-1} — в B_r, а B_r — снова в B_1. Докажите, что общее число черных клеток в множествах $B_1, B_2, \ldots, B_r$ четно.

Р. Измайлов, ученик 10 класса

Ф538. Тяжелая веревка подвешена в точках A и B (рис. 3). Абсолютное значение силы натяжения веревки в точке C равно 20 Н. Найти массу веревки.

И. Слободецкий

Ф539. На рисунке 4 показаны два замкнутых термодинамических цикла, проведенных с идеальным одноатомным газом: $1\to2\to3\to4\to1$ и $1\to5\to6\to4\to1$. У какого из циклов коэффициент полезного действия выше? Во сколько раз?

А. Зильберман

Ф540. Две катушки с индуктивностями L_1 и L_2 соединены параллельно. Какими будут максимальные токи в катушках, если параллельно им подключить конденсатор с емкостью C (рис. 5), предварительно заряженный до напряжения U?

О. Савченко

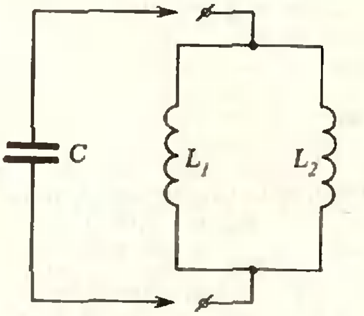


Рис. 5.

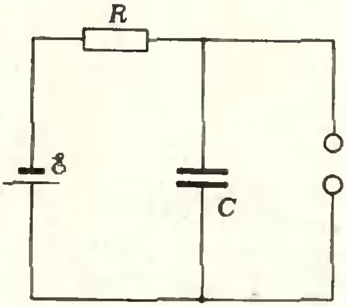


Рис. 6.

Ф541. Промежуток искрового генератора (рис. 6) отрегулирован на напряжение U, а сопротивление R резистора подобрано таким, чтобы происходило n разрядов в секунду. Определить среднюю мощность, выделяющуюся на резисторе, если во время разряда конденсатор успевает полностью разрядиться.

П. Зубков

Ф542. Как изменится скорость истечения газа из баллона через небольшое отверстие, если температуру газа увеличить в 4 раза, а давление — в 8 раз?

Решения задач

М476—М481, М483, М484; Ф493—Ф497

М476. *а) Докажите, что если вершины выпуклого n-угольника лежат в узлах клетчатой бумаги, а внутри и на его сторонах других узлов нет, то $n \leqslant 4$.*

б) Пусть пространство разбито тремя семействами параллельных плоскостей на одинаковые кубики. Вершины кубиков назовем узлами. Докажите, что если все n вершин выпуклого многогранника лежат в узлах, а на его ребрах, гранях и внутри многогранника других узлов нет, то $n \leqslant 8$.

а) Допустим, что, напротив, $n \geqslant 5$. Введем на плоскости систему координат так, чтобы координатные оси являлись линиями клетчатой бумаги и сторона клетки равнялась единице. Тогда две целочисленные координаты будут иметь точки, лежащие в узлах клетчатой бумаги, и только они. Около каждой вершины n-угольника напишем две буквы. На первом месте напишем *Ч*, если первая координата вершины четная, и *Н* — в противном случае; соответственно, на втором месте напишем *Ч*, если вторая координата вершины четная, и *Н*, если она нечетная (на рисунке 1 вершины, около которых написаны разные пары букв, покрашены в разные цвета). Так как всего имеется только четыре различные пары из букв *Ч* и *Н*, а $n \geqslant 5$, найдутся две вершины A и B многоугольника, около которых написаны одинаковые наборы букв. Пусть $A = (x_1;\ y_1)$, $B = (x_2;\ y_2)$. Середина C отрезка AB лежит внутри многоугольника или на его стороне (поскольку многоугольник выпуклый). Так как x_1 и x_2 имеют одинаковую четность, то абсцисса точки C, равная $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$, число целое; аналогично, C имеет целочисленную ординату. Следовательно, точка C лежит в узле клетчатой бумаги. Получили противоречие.

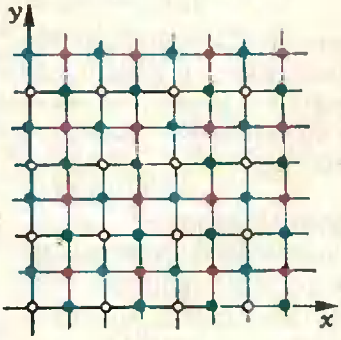


Рис. 1.

б) Рассуждение проводится аналогично предыдущему случаю с той лишь разницей, что около каждой вершины многогранника мы пишем, в зависимости от четности ее координат, тот или иной набор из букв *Ч* и *Н* длины 3. Число всевозможных таких наборов равно 8, и если число вершин многогранника больше 8, то найдутся две вершины многогранника, около которых записаны одинаковые наборы букв.

Решение этой задачи — характерный пример применения так называемого «принципа Дирихле», о котором рассказывалось в «Кванте» (1971, № 7, статья А. Орлова «Принцип Дирихле» и 1977, № 2, статья В. Болтянского «Шесть зайцев в пяти клетках»): *если в n клетках сидит $n + 1$ заяц, то хотя бы в одной клетке сидят два зайца.*

◆

М477. *Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для каждого натурального x выполняется неравенство $P(x) > x$. Определим последовательность $\{b_n\}$ следующим образом: $b_1 = 1$, $b_{k+1} = P(b_k)$ для $k \geqslant 1$. Известно, что для любого натурального d найдется член последовательности $\{b_n\}$, делящийся на d. Докажите, что $P(x) = x + 1$.*

Заметим сначала, что если целые числа x и y дают одинаковые остатки при делении на натуральное число d, то $P(x)$ и $P(y)$ также дают одинаковые остатки при делении на d. Это следует из того, что при подстановке x и y в многочлен P соответствующие члены будут давать одинаковые остатки при делении на d. (В самом деле, $x^k - y^k$ при любом натуральном k делится на $x - y$, поскольку $x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + x^{k-3}y^2 + \ldots + y^{k-1})$; следовательно, если $x - y$ делится на d, то $x^k - y^k$ — тоже.)

Пусть $P(x)$ отличен от $x + 1$. Поскольку последовательность $\{b_n\}$ — из натуральных чисел, и $P(x) > x$ для каждого натурального x, при некотором натуральном n будет $b_{n+1} > b_n + 1$. Возьмем минимальное такое n. Имеем: $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, ..., $b_n = n$, $b_{n+1} > n + 1$. Положим $d = b_{n+1} - 1$. Остатки от деления членов нашей последовательности на d вначале будут равны 1, 2, ..., n, а затем, в силу сделанного замечания и выбора d, они будут периодически повторяться: b_{n+1} даст в остатке 1, b_{n+2} даст 2, ..., b_{2n} даст n, b_{2n+1} — снова 1 и т. д. Ни один из членов последовательности, вопреки условию задачи, не будет делиться на d. Поэтому $P(x) = x + 1$.

М478. *В волейбольном турнире каждые две команды сыграли по одному матчу.*
а) Докажите, что если для любых двух команд найдется третья, которая выиграла у этих двух, то число команд не меньше семи.
б) Постройте пример такого турнира семи команд.
в) Докажите, что если для любых трех команд найдется такая, которая выиграла у этих трех, то число команд не меньше 15.

а) Рассматривая произвольную команду A вместе с одной из команд B, которой A проиграла, мы видим, что B должна проиграть хотя бы одной команде из числа выигравших у A. Иными словами, все команды, выигравшие у A, *проиграли хотя бы по одному матчу* в играх друг с другом. Значит, число команд, выигравших у A, не меньше трех. Но среди всех наших команд должна найтись команда, которая выиграла не меньше матчей, чем проиграла (иначе общее число побед было бы меньше общего числа поражений). Эта команда не менее трех раз проигрывала и не менее трех раз выигрывала, что возможно лишь в случае, когда число команд не меньше семи.

б) Сопоставим каждой из команд вершину выпуклого семиугольника. Победу команды A над командой B обозначим стрелкой, проведенной из точки A в точку B. Наш рисунок 2 показывает возможность удовлетворить условиям задачи.

в) Пусть команда A выиграла не меньше встреч, чем проиграла. Проверяя выполнение условия задачи для всевозможных троек, составленных из команды A *и двух команд, выигравших у нее*, мы видим, что команды, победившие A, образуют множество, удовлетворяющее условию задачи а). Следовательно, их не меньше семи. Команда A не менее семи встреч выиграла и не менее семи проиграла; следовательно, всего в турнире участвовало не менее 15 команд.

Аналогичным образом легко доказать, что если (при данном m) для любых m команд найдется такая, которая им всем не проиграла, то число команд не меньше $2^{m+1}-1=a_m$ (последовательность $a_1=3$, $a_2=7$, $a_3=15$, … удовлетворяет соотношению $a_{m+1}=2a_m+1$). Автору неизвестно, является ли эта оценка точной при всех m.

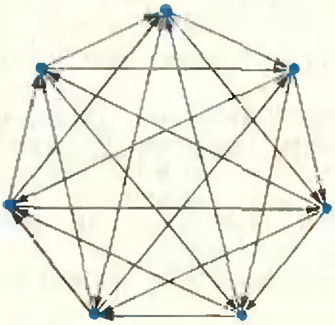


Рис. 2.

◆

М479. *Существуют ли а) шесть, б) 1000 таких различных натуральных чисел, что для любых двух a и b из них сумма $a+b$ делится на разность $a-b$?*

а) Существуют. *Например, числа 168, 170, 171, 172,* 174, 180.

б) Существуют. Покажем, как можно строить сколь угодно длинные наборы таких чисел. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — набор из n натуральных чисел, удовлетворяющий условию задачи. Тогда $n+1$ чисел $\{a_1a_2\ldots a_n, a_1a_2\ldots a_n+a_1, \ldots, a_1a_2\ldots a_n+a_n\}$ также будут удовлетворять условию. (В самом деле, $2a_1a_2\ldots a_n+a_i$, очевидно, делится на a_i, а $2a_1a_2\ldots a_n+a_i+a_j$ делится на a_i-a_j, поскольку $2a_j=(a_i+a_j)-(a_i-a_j)$, и a_i+a_j делится на a_i-a_j в силу выбора набора $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.) Начиная с набора чисел, состоящего из одной единицы, мы можем, многократно используя описанное преобразование, получить нужные нам наборы любой длины: $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{24, 26, 27, 28\}$ и т. д.

Но, как правильно заметили некоторые читатели, бесконечного множества натуральных чисел, в котором сумма любых двух делится *на их разность, не существует*.

◆

М480. *Последовательность c_n строится по следующему правилу: $c_1=2$, $c_{n+1}=[3c_n/2]$ для $n\geqslant 1$*). Докажите, что*
а) в этой последовательности бесконечно много четных чи-

Пункт а) является следствием пункта б) в такой усиленной форме: последовательность e_n, начиная с любого места, не является периодической.

б) Предположим, что последовательность $\{e_n\}$, начиная с некоторого места, периодическая, то есть что $e_{n+T}=e_n$ при некотором натуральном T для всех n, начиная с некоторого N. Это означает, что для любого $n\geqslant N$ числа c_n и c_{n+T} имеют одинаковую четность. Отсюда следует, что

$$\frac{3}{2}c_n-\left[\frac{3}{2}c_n\right]=\frac{3}{2}c_{n+T}-\left[\frac{3}{2}c_{n+T}\right],$$

---

*) *Здесь $[x]$ — целая часть числа x.*

сел и бесконечно много нечетных чисел;
б) последовательность $e_n = (-1)^{c_n}$ непериодическая;
в) существует число γ такое, что

$$c_n = [(^3/_2)^n \gamma] + 1.$$

и поэтому $c_{n+T+1} - c_{n+1} = \frac{3}{2}(c_{n+T} - c_n)$. Но ясно, что *не существует бесконечной последовательности целых чисел, в которой каждое число в полтора раза больше предыдущего.* (В самом деле, если какой-то член последовательности имеет вид $2^k \cdot r$, где r — нечетное число, то через $k+1$ шагов после него мы должны были бы встретить член $\frac{3^{k+1}r}{2}$ — число не целое.) Противоречие.

в) Легко проверить, что при любом n

$$c_{n+1} \leqslant \frac{3}{2}c_n,\ c_{n+1} - 1 \geqslant \frac{3}{2}(c_n - 1).$$

Поэтому

$$\frac{c_n - 1}{(3/2)^n} \leqslant \frac{c_{n+1} - 1}{(3/2)^{n+1}} < \frac{c_{n+1}}{(3/2)^{n+1}} \leqslant \frac{c_n}{(3/2)^n}.$$

Длина отрезка $\left[\frac{c_n - 1}{(3/2)^n};\ \frac{c_n}{(3/2)^n}\right]$ равна $(2/3)^n$, — она стремится к нулю при $n \to \infty$, поэтому все эти отрезки имеют *единственную общую точку*. Обозначим ее через γ.

Из определения γ следует, что $(3/2)^n\gamma \in [c_n - 1;\ c_n]$. При этом равенство $(3/2)^N \gamma = c_N$ ни при каком N невозможно: из него вытекало бы, что $(3/2)^n \gamma = c_n$ при любом целом $n \geqslant N$, или $c_{n+1} = \frac{3}{2}c_n$ при любом целом $n \geqslant N$, что противоречит сказанному выше. Значит, $[(3/2)^n\gamma] = c_n - 1$, что и требовалось доказать.

В решении этой задачи мы воспользовались важным принципом стягивающихся отрезков, согласно которому *последовательность вложенных отрезков*

$$[a_1;\ b_1] \supset [a_2;\ b_2] \supset [a_3;\ b_3] \supset \ldots,$$

длина $|a_n - b_n|$ которых стремится к 0, всегда имеет единственную общую точку. При аксиоматическом изложении теории действительных чисел этот принцип (или какой-либо ему эквивалентный) принимается за аксиому. Он наглядно выражает очевидное свойство «плотности» числовой оси, отсутствие в ней «дыр». Этот принцип можно доказать, исходя из теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности.

В нашей задаче легко указать левые и правые концы n-го отрезка для нескольких первых n и тем самым приближенно вычислить γ; например, с двумя знаками после запятой: $\gamma \approx 0{,}81$.

С. Конягин

◆

М481. *В последовательности натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ... каждый член a_{k+1} равен сумме квадратов цифр в десятичной записи числа a_k ($k \geqslant 1$). Докажите, что при любом a_1 в этой последовательности встретится число 1 или число 89.*

Ясно, что сумма квадратов цифр числа x — обозначим ее $f(x)$ — для достаточно большого x значительно меньше самого числа x. Так, если x — четырехзначное число, то есть $10^3 \leqslant x < 10^4$, то $f(x) \leqslant 4 \cdot 9^2 = 364 < 10^3 \leqslant x$. Вообще, если $10^{n-1} \leqslant x < 10^n$ и $n > 3$, то $f(x) \leqslant 81n < 10^{n-1}$. (Последнее неравенство легко доказать по индукции: $81n < 10^{n-1} \Rightarrow 81(n+1) = 81n + 81 < 10^{n-1} + 81 < 10^n$.) Докажем, что и для любого трехзначного x также $f(x) < x$. Если первая цифра числа x равна $p > 1$, то $f(x) < p^2 + 2 \cdot 81 = 162 + p^2 < 100p$ (в этом нетрудно убедиться для каждого $p = 2, 3, 4, \ldots, 9$). Если первая цифра x равна 1, а вторая q, то $f(x) \leqslant 1 + q^2 + 81 < 100 + 10q \leqslant x$ для любого $q = 1, 2, \ldots, 9$.

2-й разряд двузначного числа \ 1-й разряд двузначного числа	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82
2	4	5	8	13	20	29	40	53	68	85
3	9	10	13	18	25	34	45	58	73	90
4	16	17	20	25	32	41	52	65	80	97
5	25	26	29	34	41	50	61	74	89	106
6	36	37	40	45	52	61	72	85	100	117
7	49	50	53	54	65	74	85	98	113	130
8	64	65	68	73	80	89	100	113	128	145
9	81	82	85	90	97	106	117	130	145	162

Таким образом, для любого натурального числа a_1 в последовательности

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ \text{где}\ a_{n+1}=f(a_n), \qquad (*)$$

встретится число, не превосходящее 99. Для двузначных и однозначных чисел приходится изучать соответствующие им последовательности (*) перебором. В вычислениях помогает табличка, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит сумма i^2+j^2 — эта табличка *помещена выше*. Для любого $x \leqslant 99$ будет $f(x) \leqslant 162$; таким образом, множество $X=\{1, 2, \ldots, 162\}$ отображается в себя: $f(x) \leqslant 162$ для всех $x \leqslant 162$.

Как устроено отображение f множества X, показано на рисунке 3: от каждого числа x идет стрелка к числу $f(x)$. Из

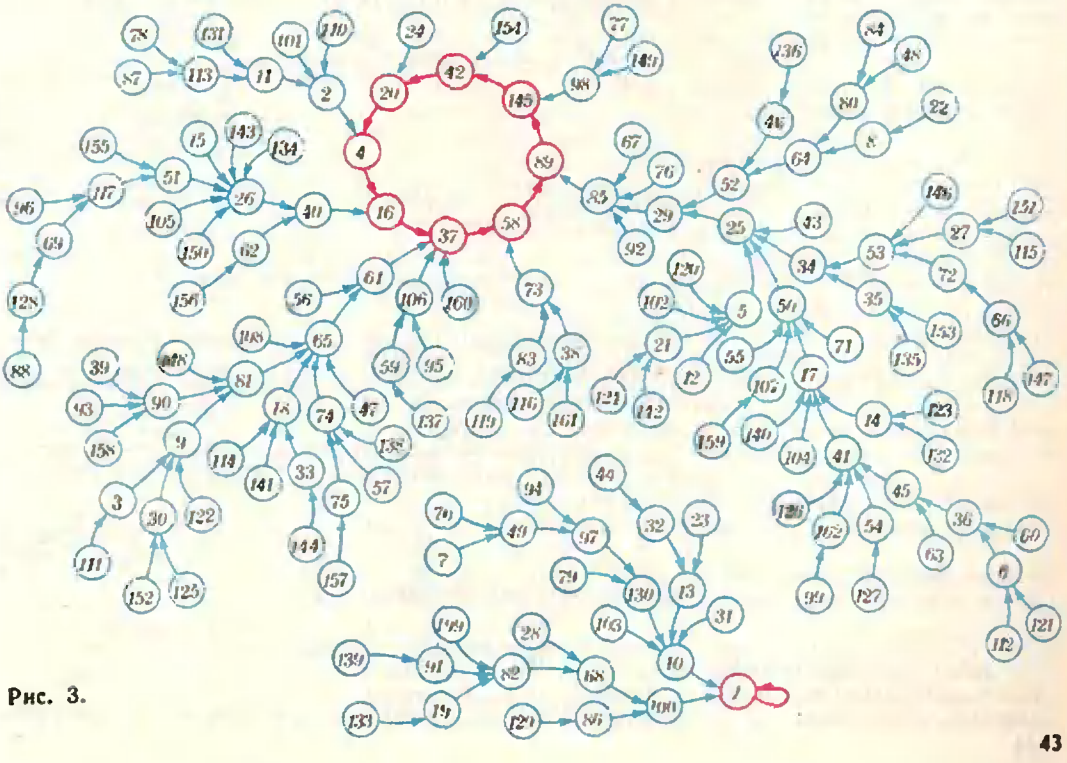


Рис. 3.

рисунка 3 видно, что для любого a_1 последовательность (*) либо войдет в «неподвижную точку» 1: при некотором N получится $a_N = 1$ (и тогда $a_{N+1} = a_{N+2} = \ldots$), либо попадет в «цикл» (период) $\ldots \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to \ldots$ (Таким образом, число 89 в условии можно было бы заменить любым из семи остальных чисел этого цикла; 89 примечательно разве лишь тем, что к нему примыкает самая мощная «ветвь» на рисунке.) Отсюда следует утверждение задачи M481.

Для аналогичной задачи, в которой вместо суммы квадратов цифр речь идет просто о сумме цифр, получается более простой результат: после нескольких применений отображения «$x \to$ сумма цифр x» из чисел a_1, кратных девяти, получится 9, а из любого числа a_1, не кратного девяти, получится остаток от деления a_1 на 9. Таким образом, здесь имеется девять неподвижных точек 1, 2, ..., 9, и по a_1 сразу можно сказать, в какую из них мы попадем.

Разумеется, можно вместо f брать и другие функции скажем, сумму кубов, или четвертых степеней цифр, и т. д. Для этих отображений также можно доказать, что $f(x) < x$ при достаточно большом x, а значит, последовательности вида (*) рано или поздно входят в один из конечного числа «циклов» — в частности, быть может, попадают в «цикл длины 1», то есть в неподвижную точку. Хотя любители цифровых диковинок, возможно, получат удовольствие, наткнувшись на такие неподвижные точки, как $1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$ (*В. Панфилов*) или $1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4 = 1634$ (*Г. Гуревич*), но искать здесь все циклы — дело довольно утомительное, даже если под рукой есть вычислительная машина.

◆

M483*). *а) Докажите, что отношение квадрата радиуса вписанной окружности прямоугольного треугольника к сумме квадратов длин медиан, проведенных из острых углов, не превосходит 1/20.*
б) Найдите наибольшее значение, которое может принимать это отношение.

Пусть a и b — длины катетов треугольника, $c = \sqrt{a^3 + b^2}$ — длина гипотенузы, r — радиус вписанной окружности. Поскольку сумма квадратов длин медиан, о которой говорится в условии, равна

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^3 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) = \frac{5}{4}c^2,$$

в задаче требуется оценить отношение $4r^2/5c^2$. Заметим, что

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} <$$

$$< \frac{a^2+b^2}{2\cdot 2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{c}{4},$$

поскольку $ab \leqslant (a^2 + b^2)/2$ и $a + b > \sqrt{a^3 + b^2}$. Отсюда получаем результат а):

$$\frac{4r^2}{5c^2} < \frac{4}{5\cdot 4^2} = \frac{1}{20}.$$

Более точная оценка (в ней используются неравенства $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ и $c^2 = a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, обращающиеся в равенства при $a = b$):

$$\frac{r^2}{c^2} = \frac{a^2b^2}{(a+b+\sqrt{a^2+b^2})^2c^2} \leqslant \frac{ab}{2(2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab})^2} =$$

$$= \frac{1}{4(1+\sqrt{2})^2},$$

откуда получаем результат б):

$$\frac{4r^2}{5c^2} \leqslant \frac{1}{5(3+2\sqrt{2})} = \frac{3-2\sqrt{2}}{5}$$

(при $a = b$ получаем равенство, то есть оценка — наилучшая).

---

*(Решение задачи M482 будет опубликовано в следующем номере журнала.

Эта задача допускает и другие решения, использующие геометрические соображения. Приведем два решения.

1°. Если продолжить диагональ квадратика на рисунке 4 до пересечения с гипотенузой, мы получим биссектрису прямого угла; обозначим ее длину через l. Поэтому $r+r\sqrt{2}\leqslant l$. Но биссектриса в любом треугольнике расположена между высотой h и медианой, длина которой в прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c равна $c/2$. Отсюда $r(1+\sqrt{2})\leqslant c/2$, откуда получаем результат.

2°. Зафиксируем отрезок AB длины c. Пусть C — любая точка полуокружности с диаметром $[AB]$ (тогда $\widehat{ACB}=90°$) и M — центр вписанной окружности треугольника ABC. Поскольку $\widehat{AMB}=135°$, точки M лежат на дуге в 90° с концами A, B, а поэтому расстояние от M до прямой AB (радиус r вписанной окружности) будет наибольшим, когда M попадает в середину этой дуги, т. е. когда прямоугольный треугольник ABC — равнобедренный.

Н. Васильев

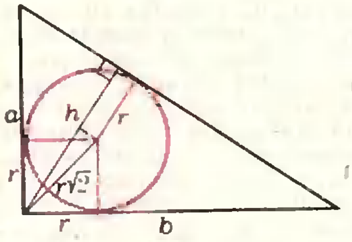


Рис. 4.

◆

M484. *При каких n существует выпуклый n-угольник, который можно разрезать на несколько правильных многоугольников (не обязательно одинаковых)?*

Мы сейчас докажем, что *при $3\leqslant n\leqslant 12$ такие n-угольники существуют, а при $n>12$ — нет.*

Обозначим разбиваемый n-угольник через M. Правильный многоугольник, участвующий в разбиении M, назовем *хорошим*, если хотя бы одна из его вершин является вершиной многоугольника M.

(Далее, говоря о многоугольниках разбиения, мы всегда под словом *многоугольник* будем подразумевать *правильный многоугольник*.)

Наше доказательство будет состоять из нескольких пунктов.

1°. Заметим, что *в вершине многоугольника M может сходиться не более двух правильных многоугольников, причем это либо два треугольника, либо треугольник и квадрат, либо треугольник и пятиугольник.*

Это утверждение немедленно следует из того, что величина каждого угла M меньше 180°, а величина угла произвольного правильного многоугольника не меньше 60°, и, кроме того, возможны только такие сочетания: 60° + 60°, 60° + 90°, 60° + 108°.

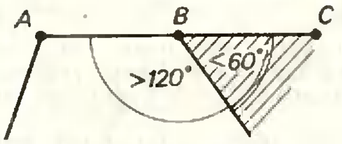


Рис. 5.

Из нашего замечания следует, что *если правильный k-угольник с $k\geqslant 6$ примыкает к вершине многоугольника M, то его стороны идут по сторонам M.*

2°. Докажем, что *правильный k-угольник при $k>6$ не может быть хорошим.* Предположим противное. Тогда, если он хороший и если все его вершины совпадают с вершинами M, то он совпадает с M, а мы предполагаем, что M разбит не менее чем на два многоугольника. Если же найдутся две соседние вершины A и B k-угольника, одна из которых (A) является вершиной M, а другая (B) — нет (рис. 5), то при вершине B образуется угол, по величине меньший 60° (на рисунке 5 он заштрихован), который не может быть заполнен углами правильных многоугольников. Противоречие.

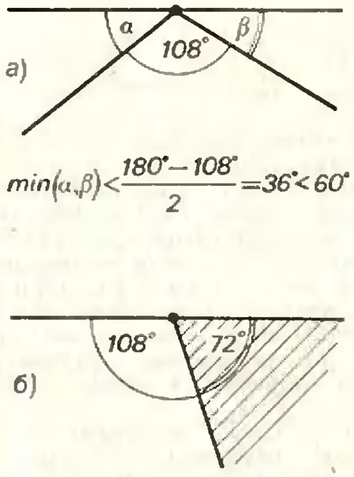


Рис. 6.

3°. Так как правильный шестиугольник можно разбить на правильные треугольники, будем считать, что в разбиении шестиугольники не участвуют.

При таком условии мы получаем, что *хорошими могут быть только треугольники, квадраты и пятиугольники.*

4°. Докажем, что *если в разбиении M есть хороший пятиугольник, то каждая его вершина является вершиной M.*

Прежде всего заметим, что вершина хорошего пятиугольника (обозначим его буквой $П$) не может быть внутренней точкой стороны ни многоугольника M, ни какого-либо многоугольника разбиения (иначе при этой точке

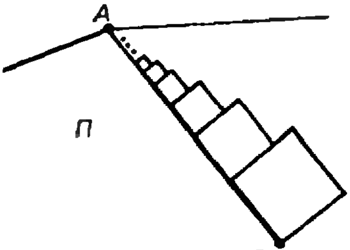


Рис. 7.

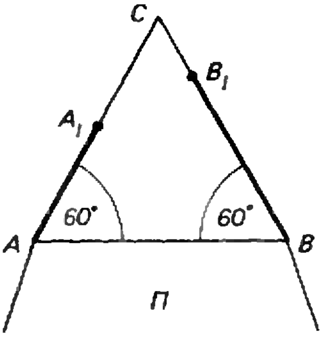


Рис. 8.

образовался бы «плохой» угол, не заполняемый правильными многоугольниками — см. рисунки 6, *а*, *б*). Поэтому каждая вершина Π либо является вершиной M, либо лежит строго внутри M и является общей вершиной еще каких-то многоугольников разбиения.

Допустим, что нашлись две соседние вершины Π, одна из которых (A) — вершина M, а другая (B) лежит строго внутри M. Покажем, что этого не может быть. В самом деле, поскольку B — общая вершина многоугольников, один из которых — пятиугольник, нам нужно заполнить правильными многоугольниками угол в $360^\circ - 108^\circ = 252^\circ$. Нетрудно сообразить, что четырьмя (и более) многоугольниками этот угол заполнить нельзя: четырех треугольников мало, а трех треугольников и одного квадрата уже много ($4\cdot 60^\circ = 240^\circ < 252^\circ$; $3\cdot 60^\circ + 90^\circ = 270^\circ > 252^\circ$). Значит, угол в 252° можно попытаться заполнить двумя или тремя многоугольниками разбиения.

Если многоугольников три, то один из них — обязательно треугольник ($3\cdot 90^\circ = 270^\circ > 252^\circ$); поэтому в этом случае для заполнения двумя многоугольниками остается угол в $252^\circ - 60^\circ = 192^\circ$. Пусть это — какие-то k- и m-угольники. Тогда

$$180^\circ\left(1-\frac{2}{k}\right)+180^\circ\left(1-\frac{2}{m}\right)=192^\circ,$$

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{m}=\frac{7}{15},$$

и если $k \leqslant m$, то $\frac{2}{k} \geqslant \frac{7}{15}$, откуда $k \leqslant \frac{30}{7} < 5$ (и $k \geqslant 3$).

При $k = 4$ получаем $m = \frac{60}{13}$ — не целое число; следовательно, квадрат в заполнении угла величиной 192° участвовать не может. По той же причине не может участвовать в его заполнении и треугольник: при $k = 3$ получаем $m = \frac{15}{2}$. Значит, угол в 192° «плохой», и, таким образом, угол в 252° тремя многоугольниками заполнить нельзя.

Если же многоугольников два, то тогда

$$180^\circ\left(1-\frac{2}{k}\right)+180^\circ\left(1-\frac{2}{m}\right)=252^\circ\ (k \leqslant m),$$

откуда

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{m}=\frac{3}{10}.$$

Убедитесь сами, что в целых числах k, m, $k \leqslant m$ это уравнение имеет только такие решения: $k = 5$, $m = 10$ и $k = 4$, $m = 20$. Покажем, что ни одно из них не годится. Действительно, в вершине B к стороне $[AB]$ пятиугольника Π не могут примыкать ни пятиугольник, ни десятиугольник, ни двадцатиугольник (у них «плохие» внешние углы — 72°, 36° и 18° соответственно); значит, в вершине B к $[AB]$ должен примыкать квадрат. Легко понять, что тогда все прилегающие к $[AB]$ многоугольники должны быть квадратами (рис. 7), что невозможно, поскольку величина «свободного» угла при вершине A меньше $72^\circ < 90^\circ$.

Значит, у хорошего пятиугольника не может быть вершины внутри M. Тем самым утверждение 4 доказано: *если пятиугольник, участвующий в разбиении M, хороший, то все его вершины являются вершинами M.*

5° Легко понять, что к соседним сторонам хорошего пятиугольника многоугольники разбиения примыкать не могут (иначе в общей вершине этих многоугольников, являющейся, по доказанному, и вершиной выпуклого M, сходилось бы не менее трех многоугольников, один из которых — пятиугольник, и сумма величин углов

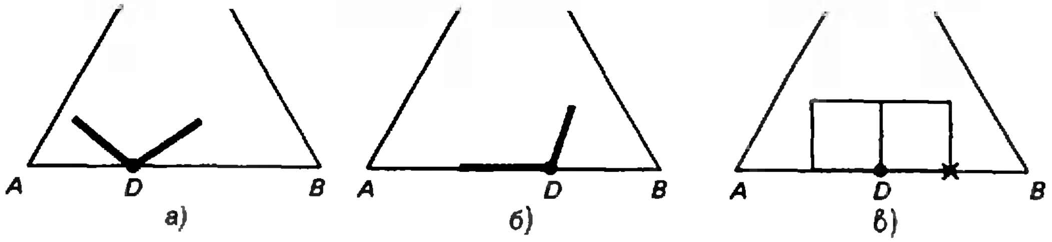


Рис. 9.

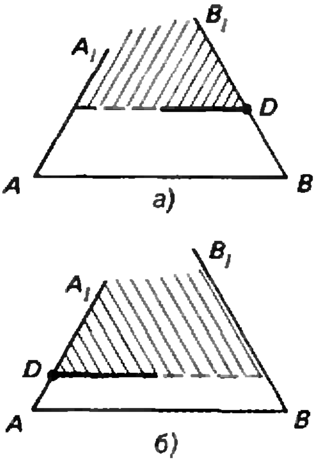


Рис. 10.

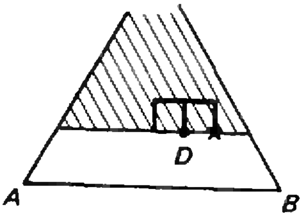


Рис. 11.

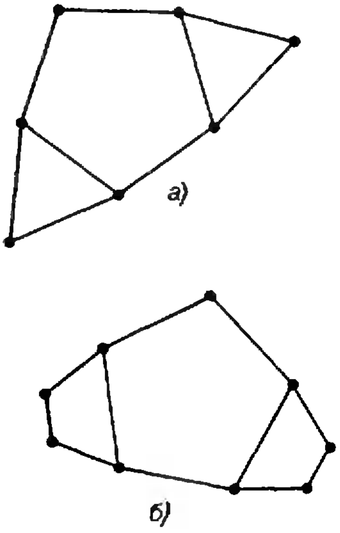


Рис. 12.

была бы не меньше $108°+2\cdot 60°>180°$). Таким образом *многоугольники разбиения могут примыкать только к несмежным сторонам хорошего пятиугольника.* Пусть $[AB]$ — сторона пятиугольника $П$, к которой примыкают еще какие-то многоугольники разбиения (рис. 8). Пусть A_1 и B_1 — вторые концы сторон многоугольника M, выходящих из вершин A и B соответственно (A_1 и B_1 — не вершины пятиугольника $П$; возможно, что $A_1 = B_1$). Обозначим через C точку пересечения (AA_1) с (BB_1). Тогда $\triangle ACB$ — правильный треугольник, внутри которого расположены все многоугольники разбиения, лежащие выше $[AB]$ (если $П$ расположен под $[AB]$, как на рисунке 8).

6°. Докажем, что *все многоугольники разбиения, лежащие внутри* $\triangle ABC$ (рис. 8), *являются треугольниками.*

Предположим противное — пусть есть «не-треугольники». (Будем считать, что сторона $[AB]$ горизонтальна.) Рассмотрим ближайшую к $[AB]$ (самую низкую) вершину не-треугольника; если таких вершин несколько, то возьмем самую правую среди них. Обозначим эту «самую низкую и самую правую» вершину через D. Точка D не может лежать на стороне $[AB]$: если «не-треугольник» расположен так, как на рисунке 9, *а*, то один из углов не больше $\frac{180°-90°}{2}=45°$ — «плохой»; если так, как на рисунке 9, *б*, и «не-треугольник» — «не-квадрат», то снова получается «плохой» угол (мы условились, что «не-треугольник» — и «не-шестиугольник»); если же «не-треугольник» — квадрат, то справа к вершине D примыкает снова квадрат (рис. 9, *в*), и, значит, вершина D — не самая правая. Точка D не может лежать и на сторонах $[AA_1]$ и $[BB_1]$ многоугольника M: концы A_1 и B_1 — не ближайшие к $[AB]$, а если D — внутренняя точка $[AA_1]$ или $[BB_1]$, то тогда «не-треугольник» должен быть целиком расположен внутри угла в 60° (рис. 10, *а*, *б*), что невозможно.

Итак, точка D — внутренняя точка области $AA_1\ldots B_1B$ многоугольника M. Поскольку все «не-треугольники», сходящиеся в D, должны располагаться не ниже проходящей через D горизонтальной прямой, сумма их углов при вершине D не больше 180°. Значит, это либо два квадрата, либо с вершиной в D есть только один «не-треугольник». Если это два квадрата, то поскольку D — самая нижняя, они могут быть расположены только горизонтально — так, как на рисунке 11; но тогда вершина D — не самая правая среди вершин «не-треугольников». Если же «не-треугольник» в D только один (например, k-угольник, $k>4$, $k\neq 6$), а остальные многоугольники разбиения — треугольники, то тогда

$$360°-180°\left(1-\frac{2}{k}\right)=60°n$$

(n — натуральное). Отсюда $k=\frac{6}{n-3}$. В натуральных числах это уравнение имеет такие решения: $n=4$, $k=6$;

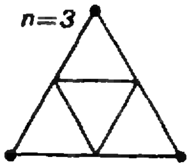


Рис. 13.

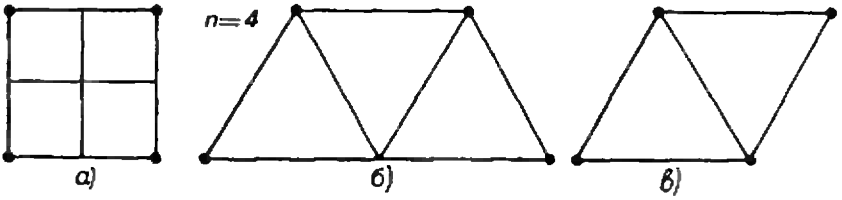


Рис. 14,

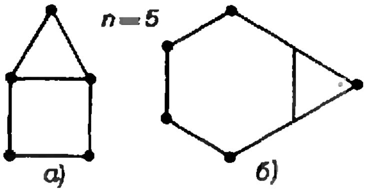


Рис. 15.

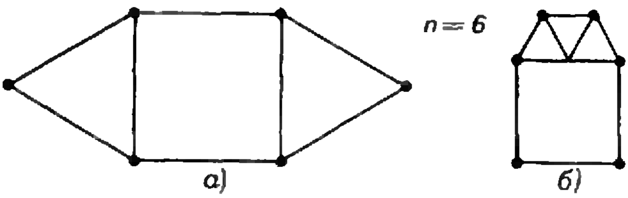


Рис. 16.

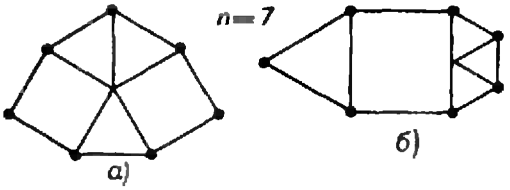


Рис. 17.

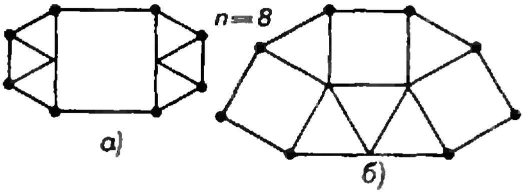


Рис. 18.

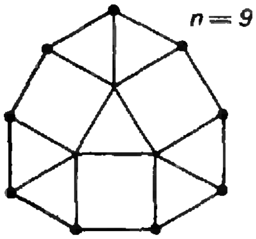


Рис. 19.

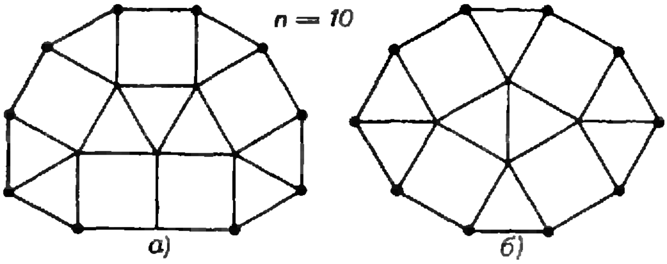


Рис. 20.

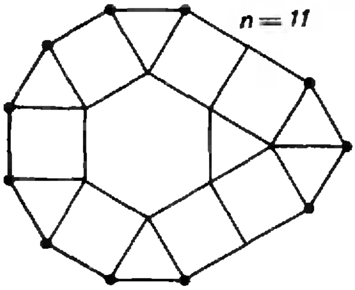


Рис. 21.

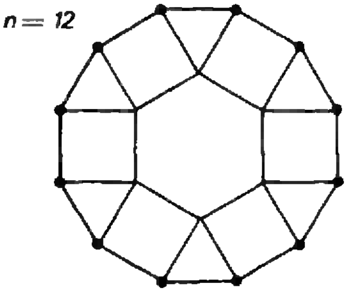


Рис. 22.

$n = 5$, $k = 3$; $n = 6$, $k = 2$; $n = 9$, $k = 1$. Ни одно из них нам не подходит (у нас $k > 4$ и $k \neq 6$). Полученное противоречие доказывает утверждение 6°: *все многоугольники разбиения, лежащие внутри $\triangle ABC$, являются треугольниками.*

7°. Докажем, что *если среди хороших многоугольников найдется пятиугольник, то M имеет не более девяти сторон (то есть $n \leqslant 9$).*

В самом деле, если $A_1 \neq B_1 \neq C$, то у M углы при вершинах A_1 и B_1 равны по величине 120° (в вершинах A_1

и B_1 сходятся треугольники — один или два; один ни при A_1, ни при B_1 быть не может, поскольку в этом случае сумма величин внешних углов при вершинах A_1 и B_1 равна либо $360° - 2 \cdot 60° = 240°$, либо $360° - 60° - 120° = 180°$, а она должна быть строго меньше 180°). Так как многоугольник M — выпуклый, это означает, что отрезок $[A_1B_1]$ является его стороной.

Таким образом, если в разбиении многоугольника M участвует хороший пятиугольник, то не более чем к двум сторонам этого пятиугольника может примыкать многоугольник, причем это либо правильный треугольник, либо равнобедренная трапеция (рис. 12). Из этого следует утверждение 7°.

8°. Докажем теперь, что *если выпуклый многоугольник M можно разбить на правильные многоугольники, то он имеет не более двенадцати сторон* (то есть $n \leqslant 12$). Предположим противное: пусть $n > 12$. Тогда из пунктов 3° и 7° следует, что среди хороших многоугольников, участвующих в разбиении многоугольника M, есть только треугольники и квадраты. Поэтому величина каждого его угла имеет вид $90°k + 60°m$ ($k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, $k \in N$, $m \in N$) и делится на 30; поскольку $90°k + 60°m < 180°$, величина каждого угла M не больше 150°. Следовательно, величина каждого его внешнего угла не меньше 30°, и тогда сумма всех его внешних углов не меньше $13 \cdot 30 > 360°$ — противоречие.

Примеры разбиений многоугольников с тремя, четырьмя, ..., двенадцатью сторонами приведены на рисунках 13—22.

С. Миронов

◆

Ф493. *Какое влияние оказывает Луна на траекторию движения Земли вокруг Солнца?*

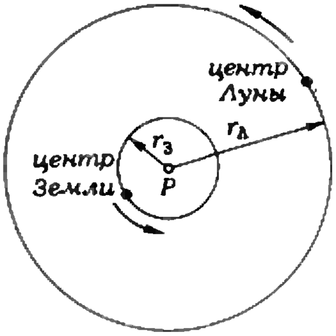


Рис. 23.

Как известно, под действием сил притяжения Луна и Земля вращаются вокруг некоторой точки P (рис. 23). Центр Луны движется по окружности радиуса $r_Л \approx 380\,000$ км, а центр Земли — по окружности радиуса $r_З \approx 4700$ км. Под действием силы притяжения Солнца система Земля — Луна вращается вокруг Солнца. При этом точка P движется по окружности радиуса $R_0 \approx 150 \cdot 10^6$ км.

При различных положениях Луны центр Земли находится то с одной стороны от траектории точки P, то с другой. При движении вокруг Солнца Земля «качается» около окружности радиуса R_0. При этом максимальное отклонение центра Земли от центра Солнца равно $R_0 + r_З$, а минимальное отклонение равно $R_0 - r_З$.

Луна совершает полный оборот вокруг Земли за время $T_Л = 27$ суток 7 часов 43 минуты 11 секунд ($\approx 27{,}322$ суток). За это же время Земля делает один оборот вокруг точки P. Центр Земли проходит при этом путь $S = 2\pi r_З \approx 29\,500$ км, а его линейная скорость $v = S/T_Л \approx 12{,}5$ м/с немного превышает рекордную скорость человека (≈ 10 м/с). Линейная скорость орбитального движения точки P равна $V \approx 30$ км/с.

Участок траектории, проходимый точкой P за сравнительно небольшое время, можно считать прямолинейным. (За одни сутки радиус-вектор точки P поворачивается на угол $\alpha \approx \dfrac{2\pi}{365} \approx 0{,}99°$, и дугу, проходимую точкой P, можно считать отрезком прямой.) Иными словами, скорость точки P в течение небольшого промежутка времени можно считать постоянной по направлению. В течение малого промежутка времени проекцию скорости v на направление движения по основной траектории можно записать в виде $v_0 = v \sin(\omega t + \varphi_0)$, где частота вращения $\omega = v/r_З$, а начальная фаза φ_0 связана лишь с выбором начала отсчета времени t. Модуль скорости центра Земли относительно Солнца за малый промежуток време-

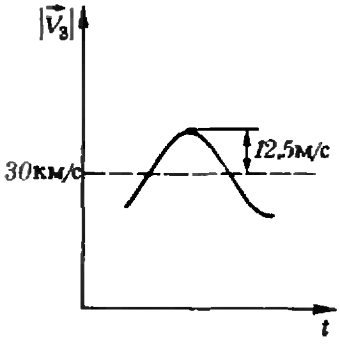


Рис. 24.

ии меняется тоже по синусоидальному закону (рис. 24):

$$\left|\vec{V}_3\right| = V + v_0 = V + v\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Таким образом, в течение малого промежутка времени траектория движения Земли вокруг Солнца представляет собой синусоиду (участок синусоиды). Всю же траекторию Земли за время полного оборота точки P вокруг Солнца приближенно можно представить как следующие друг за другом последовательные участки синусоиды, «согнутые» в окружность. Число колебаний, совершаемых Землей около основной траектории за один год, равно, очевидно, 1 год$/T_л \approx 13{,}5$. Так что через год центр Земли попадает уже не в «прошлогоднее» положение.

Мы видим, что в движении Земли, если говорить точно, нет повторяемости, то есть для движения Земли вокруг Солнца нельзя ввести понятия периода обращения. С математической точки зрения периодично движение системы Земля — Луна как целого.

На рисунке 25 схематически представлена траектория движения центра Земли вокруг Солнца.

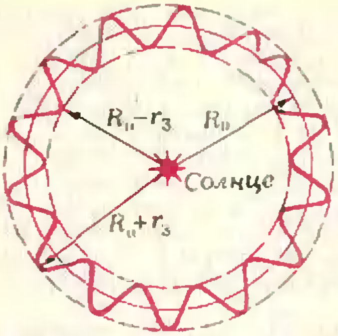


Рис. 25.

А. Дозоров

◆

Ф494. *В схеме, изображенной на рисунке 26, $R_2=90$ Ом, $R_3=300$ Ом, $R_4=60$ Ом, $L_2=90$ Г. Каковы значения R_1 и L_1, если через гальванометр G ток не идет независимо от того, подключен к клеммам a и b источник постоянного или переменного тока?*

Тот факт, что через гальванометр не идет ток, означает, что потенциалы и их фазы в точках c и d одинаковы. Следовательно, $u_{cn}=u_{dn}$, $u_{cm}=u_{dm}$ и $\frac{u_{cn}}{u_{cm}}=\frac{u_{dn}}{u_{dm}}$. Так как отношение падений напряжения на последовательных участках цепи пропорционально отношению полных сопротивлений этих участков, то

$$\frac{R_3}{\sqrt{R_1^2+\omega^2L_1^2}}=\frac{R_4}{\sqrt{R_2^2+\omega^2L_2^2}},$$

или

$$R_1^2R_4^2-R_2^2R_3^2+\omega^2\left(L_1^2R_4^2-L_2^2R_3^2\right)=0.$$

Это равенство должно выполняться при любых значениях ω. Значит, коэффициент при ω^2 должен быть равен нулю, то есть

$$L_1^2R_4^2-L_2^2R_3^2=0,$$

и следовательно,

$$R_1^2R_4^2-R_2^2R_3^2=0.$$

(Нетрудно проверить, что в этом случае $\frac{L_1}{R_1}=\frac{L_2}{R_2}$, так что фазы потенциалов в точках c и d одинаковы.)

Из последних уравнений находим:

$$L_1=L_2\frac{R_3}{R_4}=450\ \text{Г},$$

$$R_1=\frac{R_2R_3}{R_4}=450\ \text{Ом}.$$

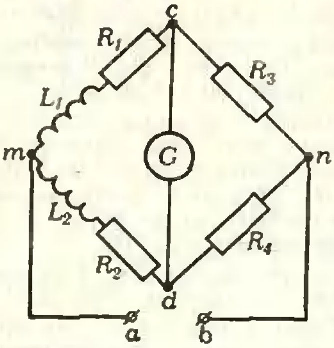


Рис. 26.

◆

Ф495. *Три несмешивающиеся жидкости с плотностями ρ_1, ρ_2 и ρ_3 заполняют замкнутую тонкую цилиндрическую трубку, образующую кольцо, плоскость которого вертикальна.*

Давление внутри трубки в точках A и B одинаково; одинаково и давление в точках C и D. Это означает, что

$$\rho_1gh_1=\rho_2gh_2+\rho_3gh_3.$$

Но $h_3=h_1-h_2$. Используя это соотношение, получим

$$(\rho_1-\rho_3)\,h_1=(\rho_2-\rho_3)\,h_2. \qquad (1)$$

(рис. 27). Жидкость с плотностью ρ_1 заполняет дугу кольца с углом α_1, жидкость с плотностью ρ_2 — дугу с углом α_2. Какой угол α образует с вертикалью радиус кольца, проведенный к границе этих жидкостей? Поверхностными эффектами пренебречь.

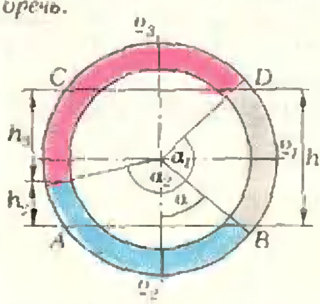


Рис. 27.

Ф496. *В цилиндрический конденсатор в точке A впускается слегка расходящийся пучок положительных ионов с малым углом раствора α (рис. 28). Все ионы в пучке имеют одинаковую энергию. Те ионы, у которых вектор скорости в точке A направлён перпендикулярно AO, движутся по окружности радиуса $AO = r_0$, концентрической с обкладками конденсатора. Доказать, что пучок ионов будет фокусироваться в точке B такой, что $\widehat{AOB} = \pi/\sqrt{2}$. Определить максимальную ширину пучка.*

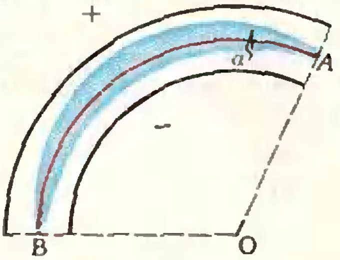


Рис. 28.

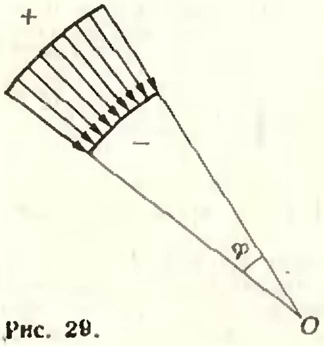


Рис. 29.

Из рисунка видно: $h_1 = R\cos\alpha + R\cos(\pi - \alpha - \alpha_1) = R[\cos\alpha - \cos(\alpha + \alpha_1)]$ и $h_2 = R\cos\alpha - R\cos(\alpha_2 - \alpha)$, где R — радиус кольца. Подставляя эти выражения для h_1 и h_2 в равенство (1), найдем

$$(\rho_1 - \rho_3)[\cos\alpha - \cos\alpha\cos\alpha_1 + \sin\alpha\sin\alpha_1] = (\rho_2 - \rho_3)[\cos\alpha - \cos\alpha_2\cos\alpha - \sin\alpha_2\sin\alpha],$$

или

$$(\rho_1 - \rho_3)(1 - \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha) = (\rho_2 - \rho_3)(1 - \cos\alpha_2 - \sin\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha).$$

Решая это уравнение, найдем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(\rho_1 - \rho_3)(1 - \cos\alpha_1) - (\rho_2 - \rho_3)(1 - \cos\alpha_2)}{(\rho_1 - \rho_3)\sin\alpha_1 + (\rho_2 - \rho_3)\sin\alpha_2}.$$

◆

Для того чтобы можно было изучить движение ионов, необходимо прежде всего выяснить, какая сила действует на ион в электростатическом поле цилиндрического конденсатора, то есть выяснить, какова напряженность электростатического поля конденсатора.

Напряженность поля пропорциональна плотности силовых линий. Если через дугу с единичным углом проходит n силовых линий, то через дугу с углом φ проходит $N = n\varphi$ силовых линий. Плотность силовых линий, пересекающих дугу радиуса r, равна отношению числа N к длине $r\varphi$ дуги, то есть равна $\frac{n}{r}$ (рис. 29).

Следовательно, напряженность поля конденсатора пропорциональна $\frac{1}{r}$:

$$E = \frac{b}{r}, \quad b = \text{const}.$$

В таком поле на заряд q, находящийся на расстоянии r от оси конденсатора, действует сила $\vec{F}$ такая, что

$$|\vec{F}| = \frac{bq}{r}.$$

Эта сила сообщает заряду ускорение $\vec{a}$, равное по модулю

$$|\vec{a}| = \frac{bq}{rm},$$

где m — масса заряда.

Обозначим x отклонение иона от основной траектории радиуса r_0 (эта траектория показана на рисунке 28 красной линией). Тогда $r = r_0 + x$, и

$$|\vec{a}| = \frac{bq}{m(r_0 + x)}.$$

Рассмотрим движение этого иона в системе отсчета, вращающейся вокруг оси конденсатора так, что угловая скорость ее в каждый момент равна угловой скорости ω отклонившегося иона. В этой системе ускорение уже не равно $\vec{a}$, так как все точки системы тоже движутся с некоторым ускорением относительно неподвижной системы отсчета, связанной с осью конденсатора. Точка, находящаяся на расстоянии $r_0 + x$ от оси, движется с центростремительным ускорением $|\vec{a}_ц| = \omega^2(r_0 + x)$.

Следовательно, во вращающейся системе отсчета ускорение иона равно

$$\left|\vec{a}_{\text{отн}}\right| = -\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{a}_{\text{ц}}\right| = -\frac{bq}{m(r_0+x)} + \omega^2(r_0+x).$$

Из закона сохранения момента импульса следует, что

$$m(r_0+x)^2\omega = mr_0^2\omega_0,$$

где ω_0—угловая скорость иона в точке A. Она же равна и угловой скорости иона, движущегося по «красной» траектории. Но центростремительное ускорение $\left|\vec{a}_0\right| = \omega_0^2 r_0$ иону, движущемуся по «красной» траектории радиуса r_0, сообщает сила $\vec{F}$, равная по модулю $\frac{bq}{r_0}$, поэтому

$$\omega_0^2 r_0 = \frac{bq}{mr_0}, \quad \text{и} \quad \omega_0^2 = \frac{bq}{mr_0^2}.$$

Таким образом,

$$\left|\vec{a}_{\text{отн}}\right| = -\frac{bq}{m(r_0+x)} + \frac{bq}{mr_0^2}(r_0+x)\ \frac{r_0^4}{(r_0+x)^4} =$$

$$= \frac{bq\left[r_0^2 - (r_0+x)^2\right]}{m(r_0+x)^3} = \frac{bq\left(-2r_0x - x^2\right)}{m(r_0+x)^3}.$$

При $x \ll r_0$

$$\left|\vec{a}_{\text{отн}}\right| = -2\frac{bq}{mr_0^2}x.$$

Мы видим, что

$$m\left|\vec{a}_{\text{отн}}\right| = -kx, \text{ где } k = 2\frac{bq}{r_0^2}.$$

Как известно, при такой зависимости ускорения тела от смещения тело совершает гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Следовательно, ионы пучка, скорость которых в точке A составляет малый угол α со скоростью ионов, движущихся по основной траектории, будут совершать относительно основной траектории радиальные гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mr_0^2}{2bq}}.$$

Этот период одинаков для всех ионов. Значит, после того как ионы попадают в конденсатор в точке A через времена $t_n = n\frac{T}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, все ионы будут оказываться в одной и той же точке основной траектории — будут фокусироваться. Нетрудно найти угол φ_0 между двумя последовательными фокусами:

$$\varphi_0 = \omega_0 t = \omega_0\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{bq}{mr_0^2}}\cdot\pi\sqrt{\frac{mr_0^2}{2bq}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, если $\widehat{AOB} = \pi/\sqrt{2}$, то ионы будут фокусироваться в точке B.

Найдем теперь максимальную ширину пучка. Для этого воспользуемся тем, что максимальное абсолютное значение скорости тела, совершающего гармонические колебания, и амплитуда $x_{\max}$ его колебаний связаны соотношением

$$\left|\vec v\right|_{max} = x_{max}\,\Omega,$$

где $\Omega = 2\pi/T$ — частота колебаний. В нашем случае $\left|\vec v\right|_{max}$ равно значению радиальной проекции скорости в точке A иона (рис. 30):

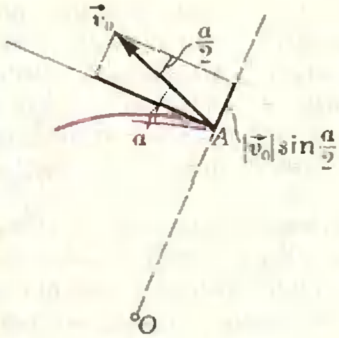


Рис. 30.

$$\left|\vec v\right|_{max} = \left|\vec v_0\right|\sin\frac{\alpha}{2} = \omega r_0 \sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{1}{2}\,\omega r_0\alpha$$

(так как α мало, $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$). Поэтому

$$\frac{1}{2}\,\omega r_0\alpha = x_{max}\,\frac{2\pi}{T}.$$

Следовательно, максимальная ширина d пучка равна

$$d = 2x_{max} = \frac{\omega r_0\alpha T}{2\pi} = \frac{r_0\alpha}{\sqrt{2}}.$$

◆

Ф497. *Диск радиуса r, вращающийся с угловой скоростью ω, бросают со скоростью $\vec v$ под углом α к горизонту. Плоскость диска во время его движения остается вертикальной. Найти радиус кривизны траектории самой верхней точки диска в тот момент, когда диск достигнет максимальной высоты своего подъема.*

В тот момент, когда диск достигнет максимальной высоты своего подъема, скорость центра диска будет направлена горизонтально и ее абсолютное значение будет равно $|\vec v|\cos\alpha$. Так как диск вращается вокруг своего центра с угловой скоростью ω, линейная скорость точек края диска в системе координат, движущейся горизонтально с той же скоростью, что и центр диска, равна ωr, а их ускорение равно по модулю $\omega^2 r$ и направлено к центру диска. В системе координат, связанной с землей, скорость $\vec u$ самой верхней точки диска в тот момент, когда диск достигает максимальной высоты подъема, направлена горизонтально, и $|\vec u| = |\vec v|\cos\alpha + \omega r$. Ускорение $\vec a$ этой точки в этот момент направлено вертикально, и $|\vec a| = \omega^2 r + |\vec g|$. Следовательно, в этот момент точка движется по круговой траектории, радиус которой определяется соотношением

$$\left|\vec a\right| = \frac{u^2}{R}.$$

Отсюда

$$R = \frac{u^2}{\left|\vec a\right|} = \frac{\left(\left|\vec v\right|\cos\alpha + \omega r\right)^2}{\omega^2 r + \left|\vec g\right|}.$$

И. Слободецкий

А. Звонкин

Когда существует предел?

Долгие годы мировой рекорд в беге на 100м держался на уровне 10,1с. Многие даже считали, что улучшить его невозможно. Но жизнь опровергла пессимистов: сначала стометровку пробежали за 10,0с, потом — за 9,9с. «Да есть ли вообще предел у рекордов?» — писали взволнованные спортивные комментаторы.

Бедные комментаторы! Они не знали теоремы Вейерштрасса — иначе ответ был бы им очевиден.

Монотонность

Про некоторую последовательность (β_n) один школьник написал в контрольной, что она — «неубывающая», а другой — что она «не убывающая». Ответ одного из школьников учитель признал правильным, а другого — неправильным. Как это могло случиться? Поскольку по правилам грамматики частицу «не» можно писать с причастием как слитно, так и раздельно — дело, конечно, в математике. Кто же из школьников прав? Оказывается... впрочем, подождем с ответом.

В п. 31 учебника «Алгебра и начала анализа 9»*) даются определения *возрастающей*, *убывающей*, *невозрастающей*, *неубывающей* и *монотонной* последовательности. Если возрастающие и убывающие последовательности объединить под названием *строго монотонных*, шесть перечисленных свойств будут находиться в логической взаимозависимости, указанной на рисунках 1 и 2.

Если последовательность (x_n) действительных чисел представить себе в виде точки, которая совершает прыжки по числовой прямой, занимая по счету «раз!», «два!», «три!», ... положения x_1, x_2, x_3, ... , то строго монотонными будут те последовательности, которые всегда прыгают в одну сторону (убывающие — налево, возрастающие — направо), а монотонными — те, которые либо прыгают в одну сторону, либо стоят на месте (например, невозрастающие последовательности прыгают налево или стоят на месте). Монотонной последовательности из бесконечного количества прыжков запрещается хотя бы два сделать в разные стороны.

Упражнения

1. Докажите, что последовательность (x_n) тогда и только тогда является одновременно невозрастающей и неубывающей, когда она—постоянная (п. 19).

2. Докажите, что последовательность не может быть одновременно возрастающей и убывающей.

Глядя на рисунок 2, легко сообразить, что из двух школьников, упомянутых в начале раздела, прав второй (если бы прав был первый, т. е. если бы последовательность (β_n) была неубывающей, то тогда был бы прав и второй — она была бы и «не убывающей», а сказано, что прав только один из них). Таким образом, поскольку первый не прав, последовательность (β_n) — либо вообще не монотонная, либо невозрастающая, но не постоянная и не убывающая.

Упражнения

3. Приведите пример невозрастающей последовательности, не являющейся ни убывающей, ни постоянной.

4. Пусть f — возрастающая (п. 36) числовая функция (п. 34). Зададим последовательность (x_n) равенствами:

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_n = f(x_{n-1}) \end{cases}$$

(a — некоторое число). Докажите, что если $x_2 > x_1$, то последовательность (x_n) — возрастающая, а если $x_2 < x_1$, то — убывающая.

---

*) В дальнейшем все ссылки — на эту книгу.

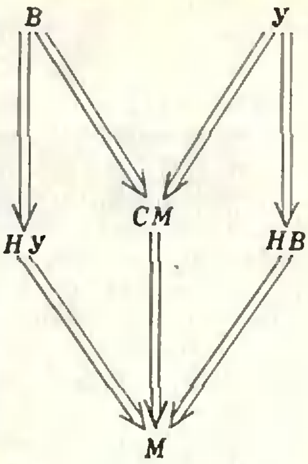


Рис. 1.

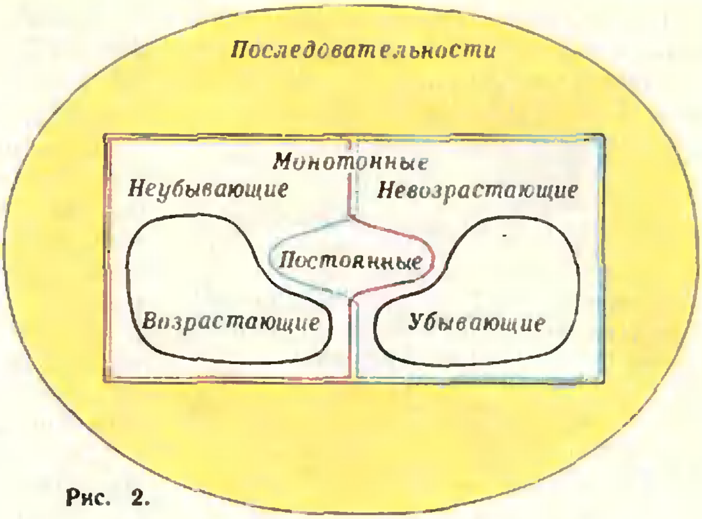


Рис. 2.

Ограниченность

К понятию *ограниченной* последовательности, введенному в учебнике (п. 26), полезно добавить еще два: последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M, что для всех n

$$x_n \leqslant M;$$

последовательность (x_n) называется *ограниченной снизу*, если существует такое число m, что для всех n

$$x_n \geqslant m.$$

Очевидно, последовательность (x_n) тогда и только тогда является ограниченной, когда она ограничена сверху и снизу.

Упражнения

5. Приведите четыре примера последовательностей: ограниченной сверху, но не снизу; ограниченной снизу, но не сверху; не ограниченной ни снизу, ни сверху; ограниченной и снизу, и сверху.

6. Докажите, что любая неубывающая последовательность ограничена снизу, любая невозрастающая — сверху.

Существование предела

В учебнике доказывается, что *если последовательность имеет предел, то она ограничена* (п. 26). Следовательно, *если последовательность не ограничена, то она предела не имеет*.

Кроме того, в учебнике формулируется упомянутая в начале статьи теорема Вейерштрасса: *если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел* (п. 32).

Ситуация станет более ясной, если мы изобразим ее в виде таблицы. Любая последовательность обладает (знак + в таблице ниже) или не обладает (знак —) каждым из двух свойств, указанных над «входными» столбцами таблицы. Таким образом, возникают четыре возможности. В трех случаях сформулированные выше теоремы позволяют утверждать существование (знак + в «выходном» столбце таблицы) или несуществование (знак —) предела. В четвертом случае (третья строка таблицы) ничего определенного сказать нельзя (см. упр. 7).

Монотонность	Ограниченность	Существование предела
+	+	+
+	—	—
—	+	
—	—	—

Упражнения

7. Приведите пример немонотонной ограниченной последовательности, имеющей предел, и пример немонотонной ограниченной последовательности, не имеющей предела.

8. Докажите, что последовательность

$$x_n = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n$$

не имеет предела.

Теорема Вейерштрасса спасает многие математические рассуждения, которые без нее оказались бы нестрогими. Сравним два рассуждения.

Пример 1. Положим

$$x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} \qquad (1)$$

(количество радикалов бесконечно). Заметим, что под первым радикалом стоит $2+x$. Решая уравнение

$$x=\sqrt{2+x}, \qquad (2)$$

получаем $x=2$.

Пример 2. Положим

$$x=1+2+4+8+16+32+\ldots$$

(количество слагаемых бесконечно). Заметим, что

$$x=1+2+4+8+16+\ldots=$$
$$=1+2(1+2+4+8+\ldots)=$$
$$=1+2x.$$

Решая уравнение

$$x=1+2x,$$

получаем $x=-1$.

Рассуждения аналогичны, однако во втором примере мы получили явную бессмыслицу. Попробуем спасти (сделать строгим) первое рассуждение. Для этого при помощи понятия предела придадим точный смысл «бесконечному выражению» (1). Рассмотрим последовательность

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{2}, \\ x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}. \end{cases}$$

Под выражением (1) естественно понимать предел этой последовательности, если он существует. Вот тут-то нам и поможет теорема Вейерштрасса. Легко проверить, что для всех n, во-первых, $x_n<2$ (по индукции) и, во-вторых, $x_n>x_{n-1}$ (см. упр. 4). Значит, по теореме Вейерштрасса последовательность (x_n) имеет предел. Таким образом, обозначение x для выражения (1) корректно. Из равенства $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$, переходя к пределу, получаем (2). Рассуждение примера 1 спасено *).

Второе рассуждение спасти таким путем невозможно (см. упр. 8).

* * *

Вернемся к началу статьи. Так есть ли предел у рекордов? Казалось бы, все ясно: последовательность рекордов, скажем, в беге на 100м, конечно, убывает (каждый следующий рекорд фиксирует меньшее время) и ограничена снизу (никто никогда не пробежит 100м за 0 секунд); значит, по теореме Вейерштрасса она имеет предел.

На самом деле, в применении математического аппарата к реальной (в данном случае, к спортивной) жизни не все так просто, как это выглядит в предыдущем абзаце. Вот и у нас, конечно же, не все корректно. Что именно? Ожидаем ваших писем.

Задачи

1. Является ли последовательность $x_n=n\cdot\sin n$ $(n\in\mathbb{N})$ ограниченной?

2. Докажите, что последовательность

$$x_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{4n}$$

имеет предел.

3. Докажите, что последовательность

$$x_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}$$

имеет предел.

4. Докажите, что последовательность

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

не имеет предела.

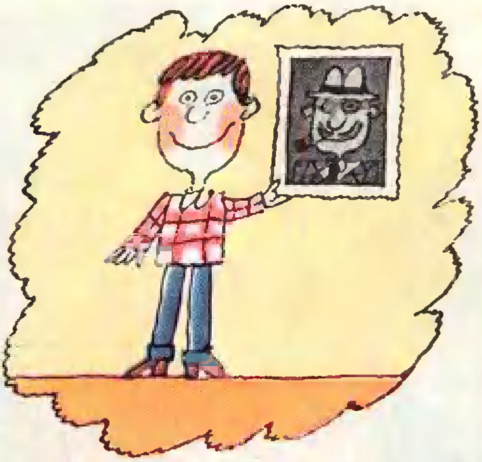
5. Чему равно число

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots}}}}?$$

---

*) По поводу осмысления «бесконечных выражений» см. также «Квант», 1977, № 10, с. 60.

«Квант» для младших школьников



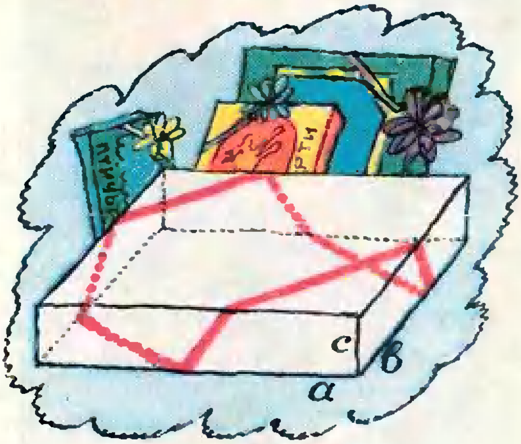
Задачи

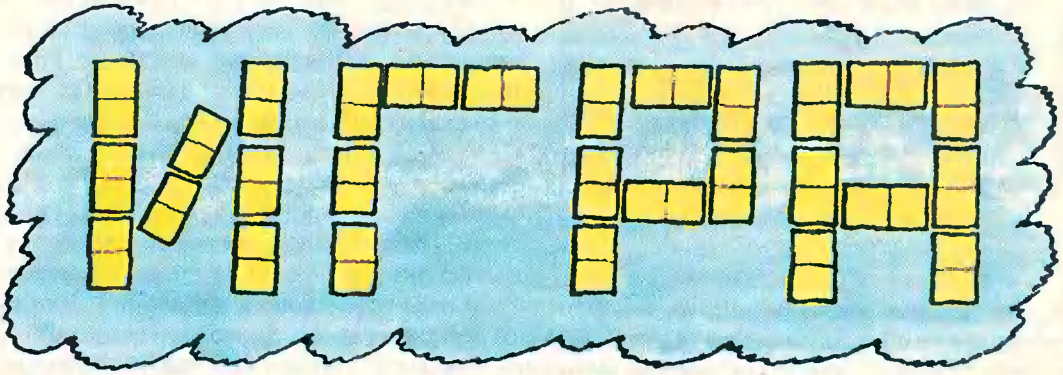
1. Сейчас отцу столько лет, сколько месяцев было сыну, когда отец был старше его в 9 раз. Сколько лет сейчас отцу, если известно, что он старше сына на 26 лет 8 месяцев?

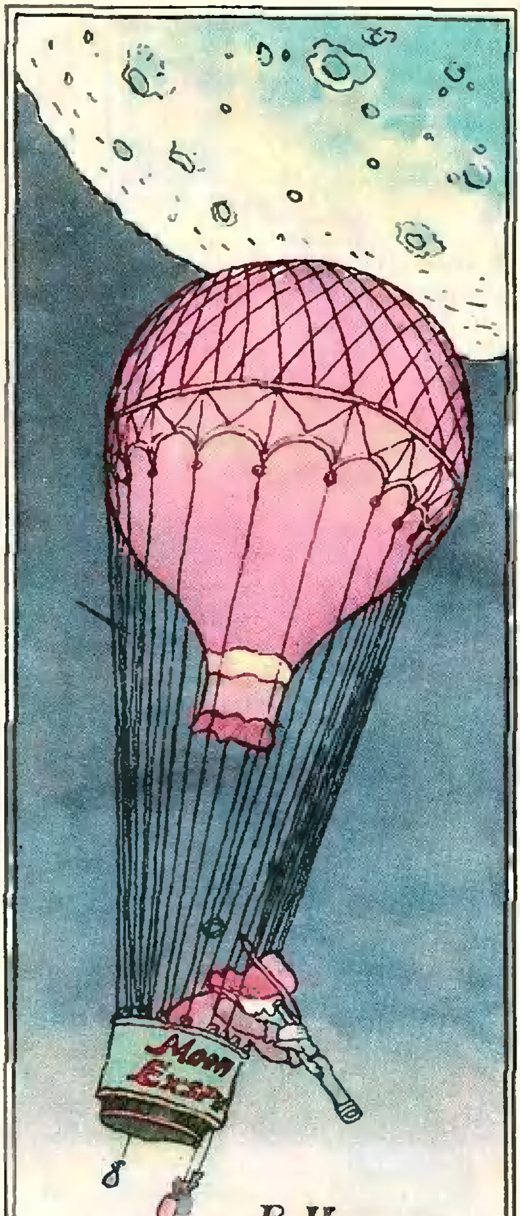
2. Полный комплект косточек домино выложите, как показано на рисунке, так, чтобы косточки соприкасались по правилам домино, и суммы очков в каждой букве были одинаковыми.

3. Коробка конфет имеет форму прямоугольного параллелепипеда (a — длина, b — ширина, c — высота коробки; коробка — не куб!). Какой длины веревочки хватит, чтобы перевязать коробку обычным способом (см. рисунок)?

4. В магазин привезли платья трех разных фасонов и трех разных расцветок. Продавщица хочет выбрать для витрины три платья так, чтобы были представлены все фасоны и все расцветки. Всегда ли она сможет это сделать?







В. Невгод

Приключения Ганса Пфааля и толстяка Пайкрафта

В этой статье обсуждаются две довольно любопытные и поучительные задачи по физике, условия которых взяты из литературных произведений.

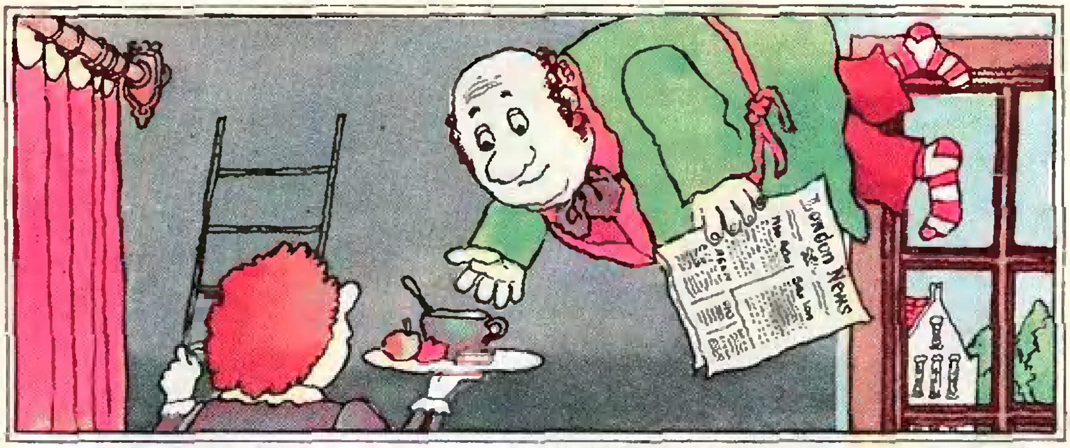
Есть у Эдгара По сравнительно малоизвестный фантастический рассказ «Необыкновенное приключение некоего Ганса Пфааля». Герой этого рассказа совершил удивительное открытие — получил необыкновенный газ, плотность которого в 37,4 раза меньше плотности водорода. Воздушный шар, наполненный таким газом, обладал невероятной подъемной силой. С его помощью Ганс Пфааль даже сумел добраться до Луны.

То, что газа легче водорода в природе не существует, доказывать не станем — это общеизвестно. (А вы сможете объяснить, почему это невозможно?) Но не лишена интереса задача: если бы такой газ все-таки существовал, во сколько раз увеличил бы он подъемную силу воздушного шара (по сравнению с шаром, наполненным водородом)?

Несмотря на несложность задачи, многие не сразу находят верный ответ. Тут так и напрашивается «логичный» вывод: поскольку газ в 37,4 раза легче водорода, то и подъемная сила его больше во столько же раз. Возможно, на такое поспешное умозаключение читателей и рассчитывал Эдгар По, когда писал свой рассказ. Впрочем, столь же вероятно, что он и сам стал жертвой ошибочного рассуждения, внешне столь логичного.

Однако простейший расчет показывает, что выигрыш в подъемной силе был бы таким ничтожным, что его можно вовсе не принимать во внимание. Проверим это. Для этого найдем подъемную силу воздушного шара, наполненного водородом, и шара, наполненного газом Ганса Пфааля.

Пусть объем воздушного шара равен 1 м^3. Плотность воздуха равна 0,00129 г/см^3, водорода — 0,00009 г/см^3, а газа Ганса Пфааля — 0,0000024 г/см^3. Напомним, что подъемная сила воздушного шара — это разность между выталкивающей силой, равной силе тяжести воздуха, вытесненного шаром, и силой тяжести газа внутри шара (оболочку шара будем считать невесомой). Тогда подъемная сила шара, наполненного водородом, равна приблизительно 12 Н,



а шара с газом Ганса Пфааля — 12,9 Н.

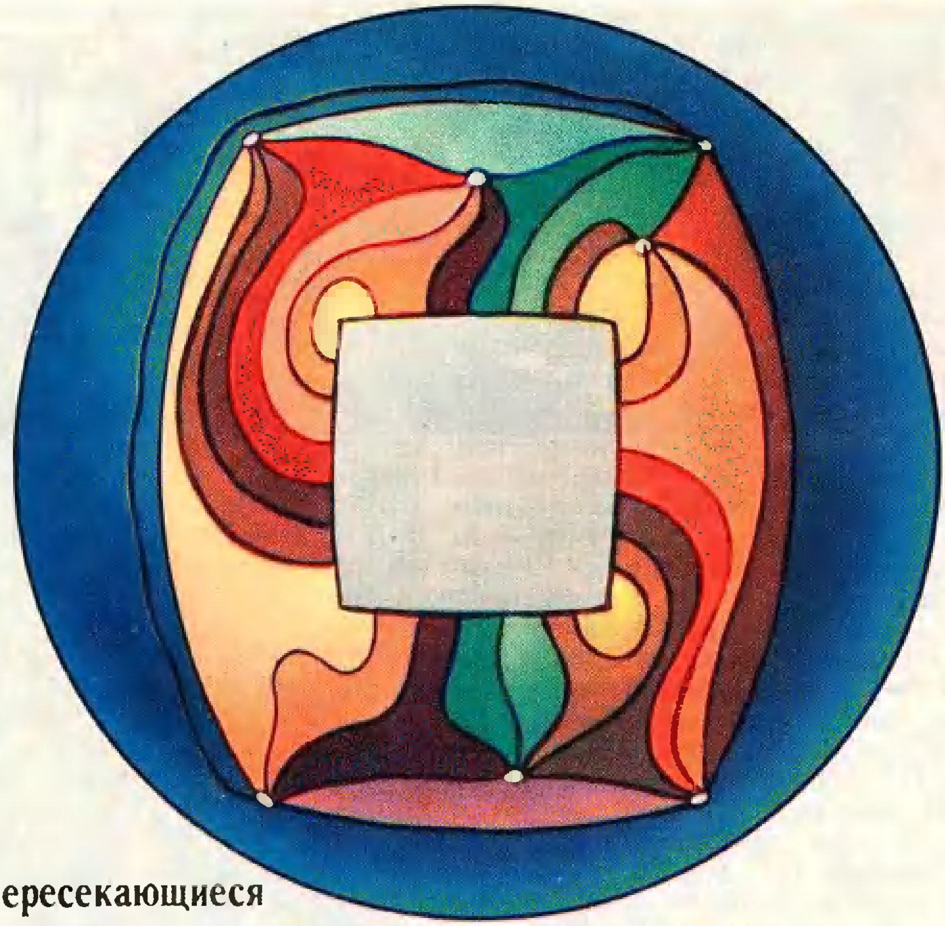
Таким образом, выигрыш в подъемной силе всего-навсего около 0,9 Н! Итог настолько ничтожный, что, очевидно, Гансу Пфаалю (или Эдгару По) не стоило и изобретать чудодейственный сверхлегкий газ, нарушая, к тому же, законы природы. (Справедливости ради заметим, что во времена Эдгара По таблица Менделеева еще не была составлена.) Вся беда — в небольшой силе тяжести водорода. Будь возможен газ даже в тысячи раз легче водорода, он все равно не помог бы существенно увеличить подъемную силу воздушного шара. Предел такого увеличения — те 0,9 Н, которые составляют силу тяжести самого водорода.

Вспомним теперь популярный фантастический рассказ Г. Уэллса «Правда о Пайкрафте». Смешной толстяк Пайкрафт, страстно желая избавиться от лишнего веса, выпил таинственное индийское снадобье — и полностью потерял вес, в самом буквальном смысле! Целыми днями летал он под потолком собственного кабинета, не выходя на улицу, дабы не упорхнуть ввысь, подобно воздушному шару. Так продолжалось до тех пор, пока Пайкрафту не посоветовали заказать себе специальный костюм со свинцовыми прокладками. В таком костюме, в тяжелых свинцовых башмаках и с полным портфелем свинца в руках он, наконец, получил возможность вновь ходить по улицам, как все люди.

Напрашивается вопрос — много ли понадобилось свинца, чтобы Пайкрафт смог спокойно ходить по Земле? Сделаем несложный расчет. Предположим, толстяк Пайкрафт весил 1000 Н (его масса была 100 кг), тогда объем его тела можно считать равным 0,1 м^3. Лишенный веса, Пайкрафт как бы превратился в своеобразный воздушный шар того же объема. «Подъемная» сила его составляла всего около 1,3 Н!

И тут мы видим, как тускнеет нарисованная буйной фантазией писателя картина злоключений невесомого Пайкрафта! Даже в повседневной своей одежде Пайкрафт вовсе не должен был парить под потолком своего кабинета, а мог бы, хотя и не очень устойчиво, сидеть в кресле за письменным столом и даже осторожно ходить по комнате (избегая, правда, резких движений). А свинцовый костюм и свинцовые ботинки ему не понадобились бы вовсе — в обычной одежде, да еще взяв в руки тяжелый портфель, он мог бы ходить по улицам (конечно, остерегаясь сильного ветра!), не опасаясь взлететь в небеса.

Как мы убедились, «летучесть» Пайкрафта и вызванные ею проблемы сильно преувеличены автором. Сомнительно, конечно, чтобы Уэллс не заметил этого, когда писал свой рассказ. Скорее всего, он умышленно игнорировал полученные при расчете данные, чтобы в более ярких и выразительных тонах представить комические злоключения бедного Пайкрафта. При этом автор, видимо, был уверен, что читатели, увлеченные оригинальным вымыслом, так и не заметят допущенных им преувеличений.



Непересекающиеся тропинки

Представьте себе, что вам нужно проложить тропинки, соединяющие попарно k точек, причем сделать это так, чтобы тропинки между собой не пересекались. Для каких k это можно сделать? Как бы вы ни старались, если эти точки лежат на плоскости или на сфере, то больше четырех точек соединить таким образом не удастся. Правда, доказать это строго довольно сложно.

Вот еще похожая задача — про домики и колодцы: нужно соединить три домика и три колодца так, чтобы каждый домик был соединен с каждым колодцем и тропинки не пересекались. Оказывается, этого тоже сделать нельзя (рис. 1, 2).

Но то, что нельзя сделать на плоскости и на сфере, удается осуществить, если точки лежат на других поверхностях. Возьмем, например, тор — так математики называют поверхность бублика. На торе удается попарно соединить даже семь точек. Лег-

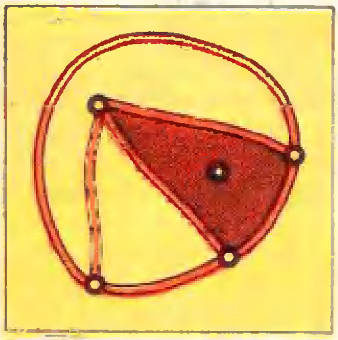


Рис. 1.

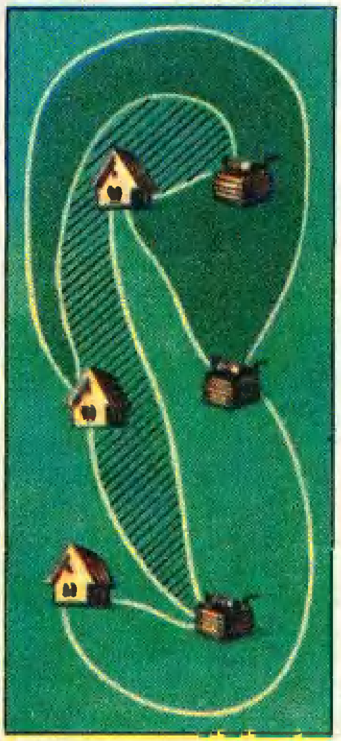


Рис. 2.

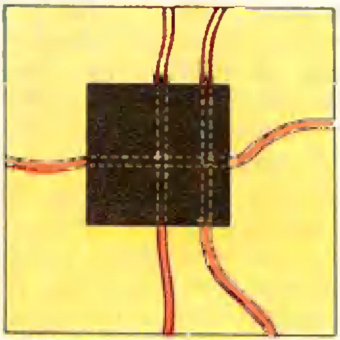


Рис. 3.

ко решить на нем и задачу о домиках и колодцах. Эту вторую задачу сделайте самостоятельно, а первая решена… на первой странице обложки. Вот правила, по которым нарисованы тропинки на обложке. Серый квадрат — это дырка, обладающая волшебным свойством: если тропинка подошла к одной из ее сторон, то после этого она продолжается на противоположной стороне дырки (рис. 3).

Но все-таки, причем здесь тор? Объясним это. Прежде всего заметим, что с точки зрения тропинок не важно, «аккуратный» тор или нет (рис. 4,5). Теперь представьте себе, что рисунок с первой страницы обложки сделан не на синей плоскости, а на синей сфере (см рис. на с. 60 на нем проведена еще одна тропинка, идущая по синей области; на обложке она не показана). Затем из сферы вырезан серый «квадрат», и противоположные стороны образовавшейся дырки склеены. При этом действительно получится тор (рис. 6). И на этом торе семь точек соединены непересекающимися тропинками.

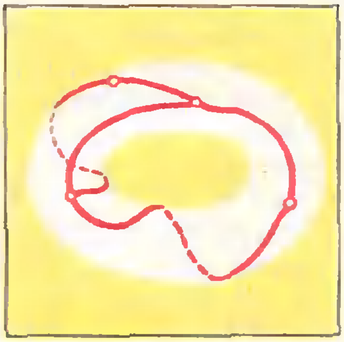


Рис. 4.

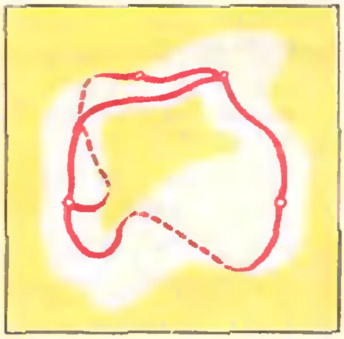


Рис. 5.

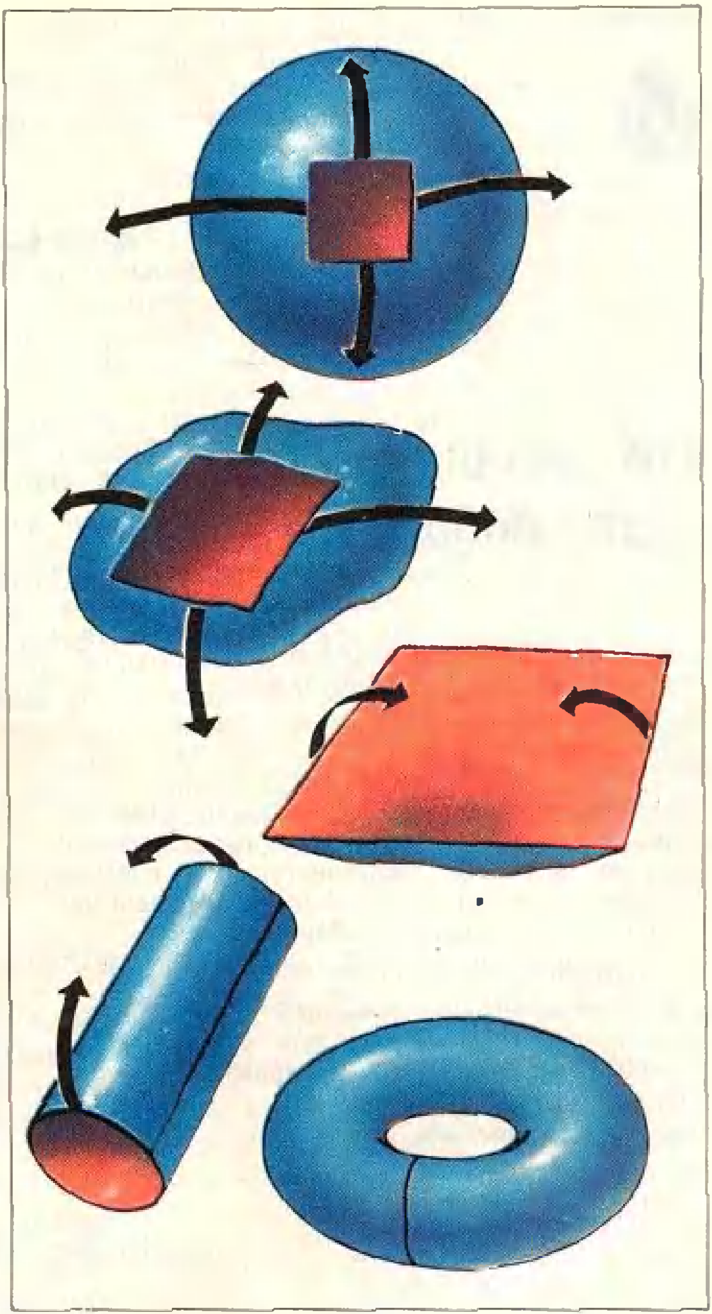


Рис. 6.

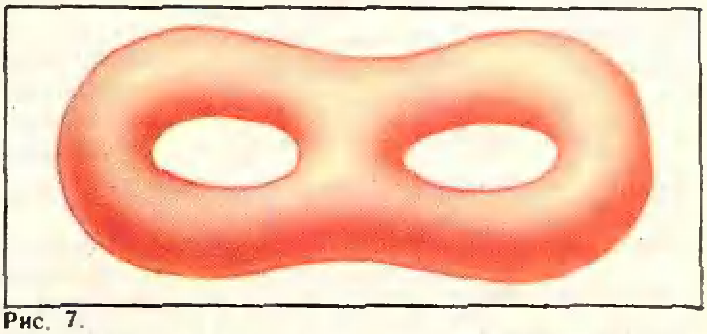


Рис. 7.

Постарайтесь решить на торе задачу про четыре домика и четыре колодца.

Придумайте аналогичные правила рисования на кренделе (рис. 7).

Г. Макаров

Г. Перевалов

Что значит «для любого ε»?

Вот какой случай произошел в прошлом году на вступительном экзамене по математике в одном из вузов.

Об одной ошибке

Абитуриенту Сереже К. досталась теорема о пределе суммы двух сходящихся числовых последовательностей.

«Пусть, — сказал Сережа, — $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда для любого положительного числа ε найдется номер n_1 такой, что для всех $n > n_1$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. А так как ε — любое положительное число, то вместо ε можно взять $\frac{\varepsilon}{2}$, и для $n > n_1$ мы получим неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Аналогично, найдется номер n_2 такой, что для всех $n > n_2$ будет выполняться неравенство $|y_n - b| < \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, мы и здесь вместо ε возьмем $\frac{\varepsilon}{2}$ и получим для $n > n_2$ неравенство

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Наибольшее из чисел n_1 и n_2 обозначим через N. Тогда для всех $n > N$ будут выполняться как неравенство (1), так и неравенство (2), и потому для этих n

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное число, из полученного неравенства следует, что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема доказана».

А Наташе М. была предложена задача: доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-2}{n} = 5$.

«Для решения задачи, — сказала Наташа, — надо взять любое положительное число ε и найти номер N такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{5n-2}{n} - 5\right| < \varepsilon. \qquad (3)$$

Так как $\varepsilon > 0$ — любое положительное число, то вместо него возьмем, например, число 0,1. Решаем неравенство

$$\left|\frac{5n-2}{n} - 5\right| < 0{,}1. \qquad (4)$$

Сначала преобразуем выражение под знаком модуля

$$\left|\frac{5n-2}{n} - 5\right| = \left|\frac{5n-2-5n}{n}\right| = \left|\frac{-2}{n}\right| = \frac{2}{n}.$$

Неравенство (4) перепишется в виде

$$\frac{2}{n} < 0{,}1,$$

откуда $n > 20$. Поэтому за N можно взять число 20. Тогда для $n > N = 20$ будет выполняться неравенство (4), а значит, и неравенство (3). Следовательно, число 5 является пределом последовательности $x_n = \frac{5n-2}{n}$, что и требовалось доказать».

И Сережа и Наташа думали, что отвечают правильно. Но экзаменаторы почему-то были недовольны.

Проверьте, пожалуйста, — обращается один из них к Наташе, — будет ли выполняться неравенство (3) для $n > 20$, если $\varepsilon = 0{,}001$? Наташа стала вычислять.

— Возьмем какое-нибудь $n > 20$, например, $n = 21$. Получим

$$|x_{21} - 5| = \left|\frac{5\cdot 21 - 2}{21} - 5\right| = \frac{2}{21} \approx 0{,}09.$$

— Сравните полученное число с числом $\varepsilon = 0{,}001$.

— Число 0,09 больше 0,001, то есть $|x_{21} - 5| > 0{,}001$.

— А это противоречит неравенству (3). В чем дело?

В чем дело?

Наташа считала, что найденный номер $N = 20$ годится для всех $\varepsilon > 0$. А оказалось, что он обеспечивает необходимую «близость» членов последовательности (x_n) к числу 5 только для чисел $\varepsilon \geqslant 0{,}1$. Для чисел же $0 < \varepsilon < 0{,}1$ он уже «мал». Например, для $\varepsilon = 0{,}001$ за номер N можно взять натуральное число 2000. Действительно,

$$|x_{2001} - 5| = \left|\frac{5\cdot 2001 - 2}{2001} - 5\right| = \frac{2}{2001} \approx 0{,}0009,$$

что меньше 0,001. Другими словами, неравенство $|x_n - 5| < 0{,}001$ будет выполняться для всех $n > N = 2000$.

Аналогичную ошибку сделал и Сережа. Ведь номер n_1 или n_2 не может быть, вообще говоря*), одним и тем же и для ε и для $\frac{\varepsilon}{2}$. Откуда взялась ошибка? Из неправильного толкования определения предела последовательности. Напомним его («Алгебра и начала анализа 9», п. 21).

Число a называется *пределом последовательности* (x_n), если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (5)$$

Фразу «любое положительное число ε» Сережа и Наташа поняли как «все положительные числа», то есть считали, что для всех положительных чисел существует один номер N такой, что для $n > N$ выполняется неравенство (5).

Что это не так, мы уже видели на примере последовательности $x_n = \frac{5n-2}{5}$. Для $\varepsilon = 0{,}1$ в качестве номера N годится 20, а для $\varepsilon = 0{,}001$ этот номер уже «мал», для него годится 2000, а для $\varepsilon = 0{,}000001$ — $N = 2\,000\,000$.

Для данной последовательности номер N зависит от числа ε, то есть для каждого $\varepsilon > 0$ следует находить «свой» номер N такой, что для $n > N$ выполняется неравенство (5). Таким образом, фраза «для любого положительного числа ε найдется N» не означает, что найдется N, пригодное для всех положительных чисел, а только для одного, произвольно взятого из множества всех положительных действительных чисел. ε — это произвольно выбранное число! Поэтому после того, как выбрано N, изменять ε нельзя, как бы нам этого ни хотелось.

Какими должны быть рассуждения Сережи и Наташи

Пусть ε — произвольное положительное число. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то по числу $\frac{\varepsilon}{2}$ (а не по числу ε!) найдется номер n_1 такой, что для всех $n > n_1$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (6)$$

Аналогично, так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то по числу $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется такой номер n_2, что для $n > n_2$ будет выполняться неравенство

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (7)$$

Пусть N — наибольшее из чисел n_1 и n_2. Тогда для всех $n > N$ будут выполняться оба неравенства (6) и (7), и потому для этих n

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leqslant \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) =$

---

*) См. ниже замечание 2.

$= a + b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Теорема доказана.

Ошибка Наташи заключается в том, что для числа ε она взяла конкретное значение 0,1 и от неравенства (3) перешла к неравенству (4). Ей надо было просто решить неравенство (3), рассматривая ε как параметр. Решая неравенство (3), получим $\frac{2}{n} < \varepsilon$, откуда $n > \frac{2}{\varepsilon}$. В качестве номера N возьмем какое-нибудь натуральное число не меньшее, чем $\frac{2}{\varepsilon}$, то есть $N \geqslant \frac{2}{\varepsilon}$. Тогда для всех $n > N$ будет выполняться неравенство (3). Найденный таким образом номер N зависит от ε. Для каждого конкретного значения ε теперь уже легко находится «свой» номер N. Например, для $\varepsilon = 0{,}1$ можно взять $N = 20$, для $\varepsilon = 0{,}001$ — $N = 2000$, и т. д.

Замечание 1. При отыскании номера N нет нужды находить минимальный номер, важно лишь указать какой-нибудь, начиная с которого будет выполняться неравенство (5). Поэтому отыскание его можно производить «грубо», «прикидкой». Покажем это на примере.

Пусть требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^4+16} = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Для отыскания N надо решить неравенство

$$\left|\frac{n^2}{n^4+16} - 0\right| = \frac{n^2}{n^4+16} < \varepsilon. \qquad (8)$$

Но это неравенство громоздко. Поэтому делаем прикидку: отбрасываем в знаменателе дроби слагаемое 16, дробь $\frac{n^2}{n^4+16}$ заменяем другой $\frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$, которая, очевидно, больше первой, и решаем неравенство

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon. \qquad (9)$$

Отсюда $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Если натуральное число N выбрать больше $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, то есть $N \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, то неравенство (9) будет выполняться для всех $n > N$. Тогда для $n > N$ и подавно будет выполняться неравенство (8). Таким образом, требуемое равенство доказано.

Замечание 2. Не следует, однако, думать, что N обязательно меняется при изменении ε. Например, для постоянных последовательностей выбор номера N вообще не зависит от числа $\varepsilon > 0$. Действительно, пусть $x_n = c$, где c — постоянное число. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Докажем это; пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Найдем номер N такой, чтобы для всех $n > N$ выполнялось неравенство $|x_n - c| < \varepsilon$. Но это неравенство всегда справедливо, так как $|x_n - c| = 0$. Поэтому за число N можно взять любое натуральное число, в частности 1.

Упражнения

1. Докажите, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$.

Найдите N для $\varepsilon = 0{,}1$; 0,05; 0,001; 0,0002.

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2-3n} = -1$.

Найдите N для $\varepsilon = 0{,}5$; 0,04; 0,0001.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+5} = 0$.

2. Найдите пределы следующих последовательностей:

а) $0;\ 1;\ 0;\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{3};\ \ldots;\ 0;\ \frac{1}{n};\ \ldots$

б) $0{,}2;\ 0{,}22;\ 0{,}222;\ \ldots,\ 0{,}\underbrace{22\ldots2}_{n};\ \ldots$

в) $\sin 1^\circ,\ \sin 2^\circ,\ \ldots,\ \sin n^\circ,\ \ldots$

г) $3;\ 3;\ \ldots,\ 3,\ \ldots$

д) $x_n = (-1)^n$.

е) $x_n = \frac{\sin n}{n}$.

ж) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + 2$.

XII Всесоюзная олимпиада школьников

Н. Розов, М. Смолянский

Олимпиада по математике

С 13 по 18 апреля в Ташкенте состоялся заключительный тур XII Всесоюзной олимпиады школьников по математике. В нем приняло участие 153 школьника: победители республиканских олимпиад и ребята, получившие дипломы I и II степени на заключительном туре XI Всесоюзной олиампиады. В заключительном туре принимала также участие команда учащихся ПТУ (3 человека) — победители олимпиады профессионально-технических училищ Ленинграда — и команда хозяев олимпиады — школьники Ташкента (3 человека).

Всего в заключительном туре соревновались 38 восьмиклассников, 63 девятиклассника и 52 десятиклассника.

Торжественное открытие заключительного тура происходило 13 апреля в актовом зале Президиума Академии наук Узбекской ССР. Председатель оргкомитета заместитель министра просвещения Узбекской ССР В. В. Барыльников поздравил участников заключительного тура олимпиады с началом соревнований. С напутственным словом выступили председатель жюри олимпиады академик А. Н. Колмогоров, заместитель председателя жюри вице-президент АН УзССР, председатель Верховного Совета УзССР академик С. Х. Сираждинов, секретарь ЦК ЛКСМ Узбекистана Ш. Н. Махмудова и другие товарищи.

Участники олимпиады возложили цветы к памятнику В. И. Ленина и могиле Неизвестного солдата. Юные математики приняли участие в традиционном коммунистическом субботнике.

Заключительный этап олимпиады проводился в два тура, которые состоялись 14 и 15 апреля.

Ниже мы приводим условия задач по математике, предлагавшихся на XII Всесоюзной олимпиаде.

Задачи

Первый день

8 класс

1. Обозначим через a_n целое число, ближайшее к $\sqrt{n}$. Найдите сумму

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{1980}}.$$

2. Внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M такая, что $ABMD$ — параллелограмм. Докажите, что если $\widehat{CBM}=\widehat{CDM}$, то $\widehat{ACD}=\widehat{BCM}$.

3. Докажите, что ни при каком натуральном m число 1978^m-1 не делится на 1000^m-1.

4. На плоскости задано конечное множество точек K_0. К нему добавляются все точки, которые можно получить симметричным отражением одной точки этого множества относительно другой. Полученное множество обозначается через K_1. Аналогично, из множества K_1 получается K_2, из K_2 — K_3 и т. д.

а) Пусть множество K_0 состоит из двух точек A и B на расстоянии 1. При каком наименьшем n в множестве K_n

найдется точка, находящаяся на расстоянии 1000 от точки A?

б) Пусть K_0 состоит из трех вершин правильного треугольника площади 1. Найдите площадь наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего множество K_n (для каждого $n = 1, 2, \ldots$).

9 класс

1. См. задачу № 1 для 8-го класса.

2. См. задачу № 2 для 8-го класса.

3. Даны две кучки спичек. Вначале в одной кучке m спичек, в другой — n спичек, $m > n$. Двое игроков по очереди берут из кучки спички. За один ход игрок берет из одной кучки любое (отличное от нуля) число спичек, кратное числу спичек в другой кучке. Выигрывает игрок, взявший последнюю спичку в одной из кучек.

а) Докажите, что если $m > 2n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш.

б) При каких α верно следующее утверждение: если $m > \alpha n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш?

4. Докажите, что существует бесконечная ограниченная последовательность $\{x_n\}$ такая, что для любых различных m и k выполнено неравенство

$$|x_m - x_k| \geqslant \frac{1}{|m-k|}.$$

10 класс

1. Пусть $f(x) = x^3 - x + 1$. Докажите, что для любого натурального $m > 1$ числа

$$m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \ldots$$

попарно взаимно просты.

2. Докажите, что существует такое число A, что в график функции $y = A \sin x$ можно вписать не менее 1978 попарно неконгруэнтных квадратов. (Квадрат называется вписанным, если все его вершины принадлежат графику.)

3. Пусть K_0 — множество из четырех точек, являющихся вершинами правильного тетраэдра единичного объема. К множеству K_0 добавляются все точки, которые можно получить симметричным отражением одной точки этого множества относительно другой. Полученное множество обозначается через K_1. Аналогично из множества K_1 получается множество K_2, из K_2 — K_3 и т. д.

а) Рассмотрим наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки множества K_1. Сколько и каких граней у этого многогранника?

б) Чему равен объем этого многогранника?

в) Найдите объем наименьшего выпуклого многогранника, содержащего множество K_n (при каждом $n = 2, 3, \ldots$).

4. См. задачу № 4 для 9-го класса.

Второй день

8 класс

5. Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Автоматы работают следующим образом. Первый автомат, прочитав карточку $(a; b)$, выдает новую карточку $(a+1; b+1)$; второй, прочитав карточку $(a; b)$, выдает карточку $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$ (он работает только, когда a и b четные); третий автомат по двум карточкам $(a; b)$ и $(b; c)$ выдает карточку $(a; c)$.

Пусть первоначально имеется одна карточка с парой чисел $(5; 19)$. Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку а) $(1; 50)$? б) $(1; 100)$?

в) Пусть первоначально имеется одна карточка $(a; b)$, $a < b$, а мы хотим получить карточку $(1; n)$. При каких n это можно сделать?

6. В окружность радиуса R вписан n-угольник площади S. На каждой стороне n-угольника отмечено по точке. Докажите, что периметр n-угольника с вершинами в отмеченных точках не меньше $2S/R$.

7. Фишка стоит в углу шахматной доски размером $n \times n$ клеток. Каждый из двух играющих по очереди передвигает ее на соседнее поле (имеющее общую сторону с тем, на котором стоит фишка). Второй раз ходить на поле, где фишка уже побывала, нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

а) Докажите, что если n четно, то начинающий игру может добиться выигрыша, а если n нечетно, то выигрывает второй.

б) Кто выиграет, если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним?

8. На плоскости задано несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Мы хотим провести еще несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков, так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную. Всегда ли это можно сделать?

9 класс

5. См. задачу № 5 для 8-го класса.

6. См. задачу № 6 для 8-го класса.

7. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[a; b]$, где $0 < a < b$. Докажите неравенство

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \times \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \leqslant \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2.$$

8. Дано простое число $p > 3$. Рассмотрим на координатной плоскости множество M, состоящее из таких точек с целыми координатами $(x; y)$, что $0 \leqslant x < p$, $0 \leqslant y < p$. Докажите, что можно отметить p различных точек множества M так, чтобы никакие четыре из них не лежали в вершинах параллелограмма и никакие три из них не лежали на одной прямой.

10 класс

5. См. задачу № 5 для 8-го класса.

6. Докажите, что для любого тетраэдра существуют такие две плоскости, что отношение площадей проекций тетраэдра на эти плоскости не меньше $\sqrt{2}$.

7. Рассмотрим n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Положим

$$b_k = \frac{a_1 + \ldots + a_k}{k} \quad (\text{для } k = 1, 2, \ldots),$$

$$C = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2,$$

$$D = (a_1 - b_n)^2 + (a_2 - b_n)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2.$$

Докажите неравенства $C \leqslant D \leqslant 2C$.

8. Рассмотрим последовательность чисел $x_n = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n$. Каждое из них приводится к виду

$$x_n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6},$$

где q_n, r_n, s_n, t_n — целые числа. Найдите пределы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{q_n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}.$$

9. См. задачу № 8 для 9-го класса.

Таблица

Результаты	Номера задач											
	8 класс											
	1	2	3	4а	4б	5а	5б	5в	6	7а	7б	8
+	15	2	1	26	2	24	17	4	7	4	2	4
±	8	0	0	5	9	0	3	12	0	1	1	1
∓	2	0	0	0	5	0	2	4	1	1	2	2
	9 класс											
	1	2	3а	3б	4	5	6	7	8			
+	44	9	17	2	0	23	23	9	6			
±	13	0	2	2	0	14	1	1	0			
∓	0	1	1	3	5	11	1	4	1			
	10 класс											
	1	2	3а	3б	3в	4	5	6	7	8	9	
+	42	12	29	11	1	1	23	5	6	11	2	
±	2	4	2	3	2	0	11	1	2	7	0	
∓	0	2	4	9	1	17	2	5	4	9	0	

Как участники соревнования справились с этими задачами, видно из приведенной таблицы. К сожалению, некоторые задачи оказались довольно трудными. Так, у восьмиклассников с задачей № 2 справились только два школьника, с задачей № 3 — один школьник и с задачей № 8 — четыре школьника.

Никто из девятиклассников не решил задачи № 4 и только два человека полностью решили задачу № 3б.

Среди десятиклассников задачи №№ 3в и 4 полностью решили толь-

Восьмиклассники, награжденные Дипломами I степени (слева направо): Ю. Ткаченко, А. Балинский, А. Разборов, А. Боричев.

В. Синцов, награжденный специальным призом нашего журнала.

Девятиклассники, награжденные Дипломами I степени (слева направо): **С. Хлебутин, И. Рудковский, И. Лысенок, И. Захаревич.**

ко по одному участнику, а задачу № 9 — два школьника.

А ведь в заключительном туре приняли участие школьники-победители республиканских олимпиад, то есть «математический цвет».

Нужно отметить большой и заслуженный успех школьников из Москвы и ФМШ № 18 при МГУ. Они получили все дипломы I степени по 10 классам, 2 диплома 1 степени по 9 классам (из 4-х) и 1 диплом 1 степени по 8 классам (из 4-х), а также много дипломов 2 и 3 степени по всем классам.

Тот, кто внимательно следит за проведением Всесоюзных олимпиад, сразу заметит, что в этом году, в отличие от прошлых лет, оба тура заключительного этапа олимпиады проходили подряд (14 и 15 апреля). При таком порядке проведения соревнований возникает ряд трудностей. Разбор всех задач, проводимый жюри с участниками заключительного тура, прошел мало продуктивно. Трудно и утомительно и для членов жюри, и для слушателей внимательно следить за разбором 12—13 сложных задач. К недостаткам проведения олимпиады следует отнести и то, что у членов жюри практически не было времени для встреч со школьниками. А ведь эти встречи являются чрезвычайно важным элементом олимпиады.

Очень живо и интересно в этом году прошла встреча участников заключительного тура с редколлегией нашего журнала. На встрече присутствовал академик А. Н. Колмогоров. Зам. главного редактора журнала М. Л. Смолянский рассказал участникам встречи о творческих планах редакции, о статьях, которые будут напечатаны в ближайших номерах журнала, а затем члены редколлегии А. Н. Колмогоров, В. Г. Болтянский, Л. Г. Макар-Лиманов, Н. Х. Розов, А. П. Савин рассказали о различных статьях журнала и предложили участникам ряд интересных задач для самостоятельного решения.

Торжественное закрытие олимпиады состоялось 18 апреля в актовом зале Ташкентского педагогического института им. Низами. Заместитель председателя жюри Н. Х. Розов зачитал решение жюри. По итогам соревнований участникам заключи-

Десятиклассники, награжденные Дипломами I степени (слева направо): В. Гальперин, В. Книжник, И. Лихтинен.

тельного этапа XII Всесоюзной олимпиады было присуждено 11 дипломов первой степени (4 диплома по 8 классам, 4 диплома по 9 классам и 3 диплома по 10 классам), 32 диплома второй степени (11 — по 8 классам, 10 — по 9 классам и 11 — по 10 классам) и 24 диплома третьей степени (4 — по 8 классам, 9 — по 9 классам, 11 — по 10 классам); кроме того, 80 участников были награждены похвальными отзывами.

Имена победителей мы публикуем на с. 82.

Особо отмечая успешное выступление на олимпиаде школьников из города Ангарска, жюри присудило Ангарскому городскому отделу народного образования специальный приз.

Многие участники получили специальные призы, установленные различными организациями и предприятиями Узбекистана.

Специальным призом журнала «Квант» был награжден ученик 8 класса *Вадим Синцов* (пос. Комсомольский Тюменской области).

За успехи в олиампиаде годовой подпиской на 1979 год на журнал «Квант» награждены:

учащиеся 8 классов:

1. *Братченко Светлана* (Краснодарский край);
2. *Лучко Юрий* (Гродненская обл.);
3. *Файсман Александр* (Ташкент);

учащиеся 9 классов:

4. *Абдуганиев Абдували* (Ташкентская обл.);
5. *Ирматов Анвар* (Наманган);
6. *Щербаков Сергей* (Ленинград).

В этом году олимпиада была организована очень хорошо. Ребята ездили на экскурсии, ходили в театры, участвовали в коммунистическом субботнике. Необходимо отметить большую работу по организации олимпиады, проведенную работниками органов народного образования и математиками Узбекистана. За отличное проведение олимпиады редколлегия журнала наградила годовой подпиской на «Квант» заместителя председателя жюри олимпиады вице-президента АН УзССР академика С. Х. Сираждинова, республиканскую школу-интернат юных математиков и физиков Ташкента (директор С. А. Атаметов), заместителя председателя жюри Т. А. Азларова и члена оргкомитета А. Б. Воронову.

Подводя итоги олимпиады, хотелось бы остановиться на некоторых вопросах, требующих своего разрешения. Представители профессионально-технических училищ зарекомендовали себя как полноправные участники олимпиады. Поэтому было бы естественно, чтобы министерство просвещения СССР и Государственный Комитет Совета Министров СССР по профессионально-техническому образованию установили официальный статут участия в олимпиаде команды профессионально-технических училищ подобно тому, как это сделано для учащихся школ Министерства путей сообщения СССР.

Более тщательного планирования требует учебная часть программы олимпиады, чтобы школьники могли не только соревноваться в решении задач, но и прослушать лекции ведущих ученых по математике, узнать новое и интересное о своей любимой науке, получить необходимые консультации, иметь возможность побеседовать с членами жюри. Возможно, для этого стоит вернуться к старой форме олимпиады — проведению только одного тура, который полезно было бы дополнить личными собеседованиями с участниками.

Заслуживает внимания предложение о введении специального *Диплома участника олимпиады*, который вручается всем участникам олимпиады. Это значительно повысит авторитет самого факта выхода учащегося в заключительный тур Всесоюзной олимпиады.

Наконец, было бы полезно отмечать специальными грамотами не только победителей олимпиады, но и их воспитателей — учителей математики.

Задачи олимпиады по математике

В этом году только две задачи заключительного тура XII Всесоюзной олимпиады по математике не вошли в Задачник «Кванта». (Условия задач см. на с. 65—67.) Ниже приводятся решения этих задач.

9 класс

Задача 8.

Рассмотрим p точек с координатами $(i;\ \overline{i^2})$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, а через $\overline{i^2}$ обозначен остаток от деления i^2 на p. Если некоторые три точки $(a;\ \overline{a^2})$, $(b;\ \overline{b^2})$, $(c;\ \overline{c^2})$ из этого набора лежат на одной прямой, то векторы $(b-a;\ \overline{b^2}-\overline{a^2})$ и $(c-b;\ \overline{c^2}-\overline{b^2})$ коллинеарны, откуда $(b-a)(\overline{c^2}-\overline{b^2}) = (\overline{b^2}-\overline{a^2})(c-b)$. По определению $\overline{i^2}$ отсюда следует, что $(b-a)(c^2-b^2)-(b^2-a^2)(c-b)$ делится на p. Следовательно, $(b-a)(c-b)[(c+b)-(b+a)] = (b-a)\times(c-b)(c-a)$ делится на p. Поскольку p — простое число, это возможно только в том случае, когда одна из скобок делится на p. Но каждая из них меньше p. Поэтому одна из скобок равна нулю, и некоторые две точки из выбранных трех совпадают.

Аналогично показывается, что четыре различные точки из нашего набора не могут лежать в вершинах параллелограмма. Действительно, пусть точки $(a;\ \overline{a^2})$, $(b;\ \overline{b^2})$, $(c;\ \overline{c^2})$, $(d;\ \overline{d^2})$ лежат в вершинах параллелограмма. Тогда векторы $(b-a;\ \overline{b^2}-\overline{a^2})$ и $(d-c;\ \overline{d^2}-\overline{c^2})$ равны. Отсюда $b-a=d-c$ и число $b^2-a^2-(d^2-c^2)=(b+a)(d-c)-(d+c)(d-c)=[(b+a)-(d+c)](d-c)$ делится на p. Но тогда делится на p и $(b+a)-(d+c)$, откуда на p делится и $(b+a)-(d+c)+(b-a)-(d-c)=2(b-d)$ — противоречие.

10 класс

Задача 7.

Рассмотрим наряду с C и D числа $C_i=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_i-b_i)^2$ и $D_i=(a_1-b_i)^2+(a_2-b_i)^2+\ldots+(a_i-b_i)^2$ $(i=1,2\ldots)$. Тогда $C=C_n$, $D=D_n$. Докажем, что последовательности D_i-C_i и $2C_i-D_i$ — неубывающие. Поскольку $C_1=D_1=0$, из этого будет следовать решение задачи. Заметим, что $D_i=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_i^2-2b_i(a_1+a_2+\ldots+a_i)+ib_i^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_i^2-2ib_i^2+ib_i^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_i^2-ib_i^2$. Поэтому $D_{i+1}=D_i+a_{i+1}^2+ib_i^2-(i+1)b_{i+1}^2$, а $C_{i+1}=C_i+(a_{i+1}-b_{i+1})^2$. Отсюда

$$D_{i+1}-C_{i+1}=D_i-C_i+a_{i+1}^2+ib_i^2-(i+1)b_{i+1}^2-(a_{i+1}-b_{i+1})^2=$$
$$=D_i-C_i+[(i+1)b_{i+1}-ib_i]^2+ib_i^2-(i+1)b_{i+1}^2-i^2(b_{i+1}-b_i)^2=$$
$$=D_i-C_i+i(b_{i+1}-b_i)^2\geqslant D_i-C_i$$

(здесь использовано равенство $a_{i+1}=(i+1)\times b_{i+1}-ib_i$). Аналогично, $2C_{i+1}-D_{i+1}=C_{i+1}+(C_{i+1}-D_{i+1})=C_i+i^2(b_{i+1}-b_i)^2+C_i-D_i-i(b_{i+1}-b_i)^2=2C_i-D_i+(i^2-i)(b_{i+1}-b_i)^2\geqslant 2C_i-D_i$.

Л. Лиманов

Т. Петрова

Олимпиада по физике

Проходившая в этом году XII Всесоюзная олимпиада школьников была посвящена 60-летию ВЛКСМ.

Заключительный этап олимпиады по физике проходил в столице Туркменской ССР городе Ашхабаде. Его участниками были 138 учащихся: 39 восьмиклассников, 50 девятиклассников и 49 десятиклассников. Все они — победители районных, городских, областных и республиканских олимпиад 1978 года или победители предыдущей Всесоюзной олимпиады.

Открытие заключительного этапа олимпиады состоялось 13 апреля в городском Дворце пионеров. С теплым приветственным словом к участникам обратилась министр народного образования Туркменской ССР Б. Пальванова. Больших успехов в предстоящей олимпийской борьбе и в дальнейших занятиях любимым делом — физикой — пожелал ребятам председатель жюри олимпиады вице-президент Академии наук ТССР доктор физико-математических наук О. Овезгельдыев. От имени комсомольцев республики успехов на олимпиаде пожелала участникам секретарь ЦК ЛКСМ ТССР Ж. Чарыева. Представитель Министерства просвещения СССР М. Грабиленков в своем приветствии выразил уверенность, что творческая работа на олимпиадах, целеустремленность, с которой ребята готовятся к этим конкурсам, несомненно помогут им в дальнейшей жизни, в труде.

Первый тур заключительного этапа олимпиады — теоретический — состоялся 14 апреля. Участникам были предложены следующие задачи:

8 класс

1. Маятник представляет собой легкий стержень длины l с грузом массы M на конце (рис. 1). К другому концу прикреплена легкая цилиндрическая втулка с внутренним радиусом R, надетая на вращающуюся горизонтальную ось. Коэффициент трения между втулкой и осью μ. Определить угол отклонения стержня от вертикали в равновесии.

2. На графике (рис. 2) приведена зависимость тока через автомобильную лампочку от напряжения на ней. Лампочку подключают к источнику постоянного напряжения $U = 10$ В последовательно с сопротивлением $R = 4$ Ом. Определить мощность лампочки.

3. Снаряд разрывается в некоторой точке траектории на два осколка. На рисунке 3, сделанном в определенном масштабе, крестиками отмечены положения снаряда и одного из осколков через последовательные равные промежутки времени. Найдите положения второго осколка в соответствующие моменты времени, если известно, что он находится в точке B в тот момент, когда первый осколок находится в точке A. Стрелкой на рисунке показано направление ускорения свободного падения. Опишите ваш способ построения.

4. В дне цилиндрической кастрюли площади S_1 просверлили дырку площади S_2 и вставили в нее пластмассовую трубку (рис. 4). Масса кастрюли с трубкой равна M. Кастрюля стоит на ровном листе резины дном вверх. Сверху в трубку осторожно наливают воду. До какого уровня можно налить воду, чтобы она не вытекала снизу?

9 класс

1. Гейзеры могут рассматриваться как большие подземные резервуары, напол-

Рис. 1.

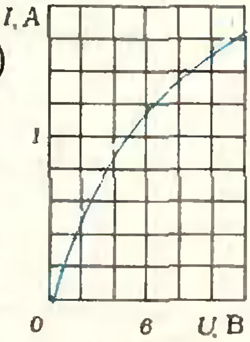


Рис. 2.

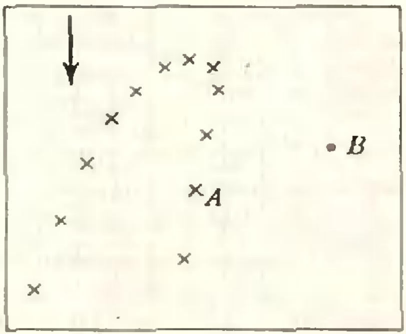


Рис. 3.

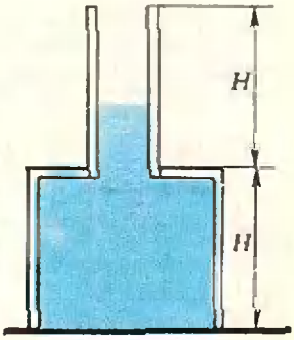


Рис. 4.

Рис. 5.

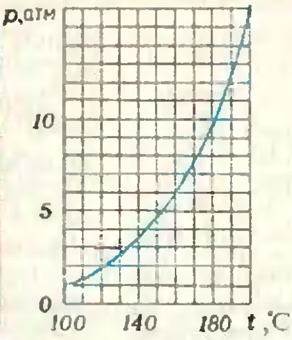


Рис. 6.

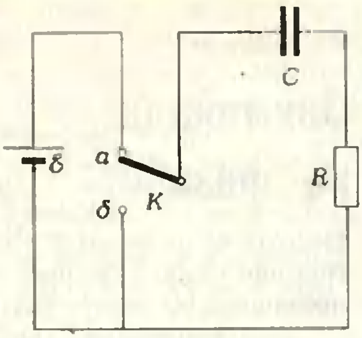


Рис. 7.

ненные грунтовой водой и прогреваемые земным теплом (рис. 5). Выход из них на поверхность земли осуществляется через узкий канал, который в «спокойный» период практически полностью заполнен водой. Считая, что «активный» период наступает, когда закипает вода в подземном резервуаре, и что во время извержения канал заполнен только паром, который выбрасывается наружу, оценить, какую часть воды теряет резервуар гейзера во время одного извержения. Глубина канала $h = 90$ м; удельная теплота испарения воды $L = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг; удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К). График зависимости давления насыщенного водяного пара от температуры дан на рисунке 6.

2. Модель вертолета, изготовленная в 1/10 натуральной величины, удерживается в воздухе при мощности мотора 30 Вт. Какой должна быть минимальная мощность двигателя вертолета, изготовленного из тех же материалов, что и модель?

3. В схеме, показанной на рисунке 7, э. д. с. батареи $\mathcal{E} = 100$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 100$ Ом, емкость конденсатора $C = 200$ мкФ и сопротивление нагревателя $R = 10$ Ом. Ключ K переключается между контактами «a» и «$б$» $f = 10$ раз в секунду. При подключении его к клемме «a» конденсатор успевает полностью зарядиться, а при подключении к клемме «$б$» — полностью разрядиться. Чему равен коэффициент полезного действия схемы? Во сколько раз он выше, чем при непосредственном подключении нагревателя к батарее?

4. На рисунке 8 приведен график зависимости напряжения на разрядном промежутке дугового разряда от тока. Дугу подключают к источнику постоянного напряжения последовательно с резистором. При каком максимальном значении сопротивления резистора дуга может гореть при напряжении источника $U = 85$ В?

5. Колба термоса объемом 1 литр откачана до давления $p = 10^{-6}$ атм (при комнатной температуре). Оценить время, в течение которого чай в таком термосе остынет с 90°C до 70°C. Площадь поверхности колбы $S = 600$ см^2. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К); универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(К·моль). Утечку тепла через пробку не учитывать.

10 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. См. задачу 5 для 9 класса.

3. При увеличении тока напряжение на разрядном промежутке дугового разряда уменьшается, стремясь при больших токах к некоторому постоянному значению. Дугу включили в сеть последовательно с некоторым балластным резистором. Вольтамперная характеристика (то есть зависимость напряжения от тока) для такой цепи показана на рисунке 9. 1) Постройте вольтамперную характеристику дуги без балластного резистора. 2) Используя полученный вами график, определите максимальное сопротивление балластного резистора, при котором дуга может гореть при напряжении источника $U = 85$ В.

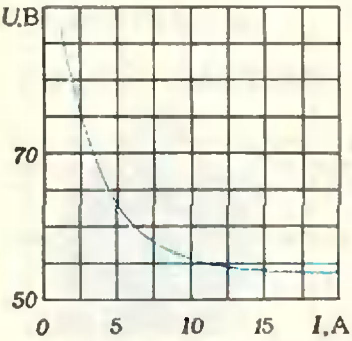


Рис. 8.

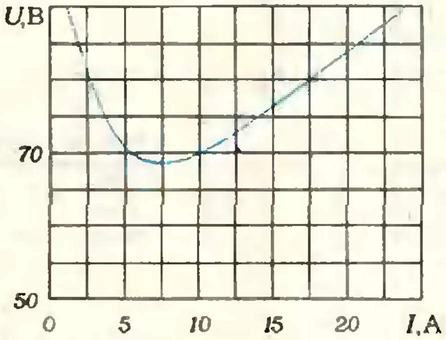


Рис. 9.

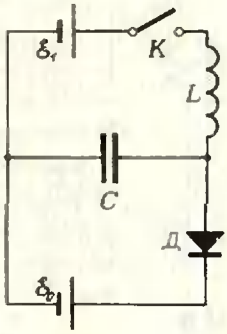


Рис. 10.

Рис. 11.

4. В схеме, изображенной на рисунке 10, э. д. с. батареи $\mathcal{E}_0$ больше, чем $\mathcal{E}_1$. Определить заряд, который протечет через батарею $\mathcal{E}_0$ при замыкании ключа K, полагая, что внутренние сопротивления обеих батарей и сопротивление катушки равны нулю. Диод D считать идеальным (его прямое сопротивление равно нулю, обратное — бесконечно велико). Конденсатор C до замыкания ключа был незаряжен.

5. Используя фотографию, сделанную для рекламного плаката (рис. 11), определите: 1) Фокусное расстояние объектива фотоаппарата. 2) На каком расстоянии от ладоней рук располагался объектив при фотографировании? 3) Размер рыбы, пойманной рыбаком. 4) Диаметр объектива, предполагая, что размытие деталей изображения на фотографии не превосходит 0,2 мм. Объектив фотоаппарата рассматривать как тонкую линзу.

На решение задач восьмиклассникам отводилось 4 часа, а девятиклассникам и десятиклассникам — 5 часов.

Сразу после того, как участники олимпиады сдали свои работы, к их проверке приступили члены жюри. В составе жюри — ученые Академии наук СССР, Академии педагогических наук СССР, Сибирского отделения АН СССР, преподаватели Московского физико-технического института, Московского, Новосибирского и Туркменского государственных университетов.

Еще до проверки работ члены жюри высказали свое мнение относительно сравнительной трудности задач теоретического тура. Результаты проверки показали, что мнение жюри совпало с мнением самих участников. Наиболее трудной для восьмиклассников оказалась задача 1; ее смогли решить только 8 участников. Самой легкой оказалась задача 4. У девятиклассников наибольшие затруднения вызвала задача 2; ее правильно решили 22 участника. Наибольшее число верных решений было по задаче 4. Для десятиклассников самой трудной была задача 4: с ней справились только 10 участников. Самой легкой оказалась задача 3.

Задачи теоретического тура включены в Задачник «Кванта» (№№ 7, 8 за этот год), так что каждый желающий может проверить себя, померяться силами с олимпийцами. Лишь задача 4 для 8 класса не вошла в Задачник «Кванта». Вот ее решение.

Вода не будет вытекать снизу до тех пор, пока кастрюля не начнет всплывать.

На кастрюлю действуют две силы: сила тяжести $M\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила $\vec{F}$ давления на дно кастрюли со стороны воды, направленная вертикально вверх. Сила давления по абсолютной величине равна

$$\left|\vec{F}\right| = p(S_1 - S_2) = \rho\left|\vec{g}\right|h(S_1 - S_2),$$

где p — давление воды на уровне дна кастрюли, h — высота уровня воды в трубке.

Значение h, при котором кастрюля начнет всплывать, определяется условием

$$\rho\left|\vec{g}\right|h(S_1 - S_2) = M\left|\vec{g}\right|,$$

откуда

$$h = \frac{M}{\rho(S_1 - S_2)}.$$

Очевидно, что задача будет иметь решение, если $h \leqslant H$.

16 апреля в лабораториях физического факультета Туркменского государственного университета проходил экспериментальный тур олимпиады. Каждому участнику предлагалось две задачи. Вот условия этих задач.

8 класс

1. Определите отношение плотностей жидкостей.

Оборудование: рычаг-линейка, два груза, два сосуда с различными жидкостями, штатив с муфтой и лапкой.

2. Проверьте экспериментально выполнение закона сохранения импульса при столкновении движущегося шара с неподвижным, установленным на горизонтальном участке лотка. Объясните полученные результаты.

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, набор из двух пластмассовых и двух стальных шаров с заданными массами, лоток дугообразный, листы белой и копировальной бумаги, линейка масштабная.

9 класс

1. Проверьте экспериментально выполнение законов сохранения импульса и

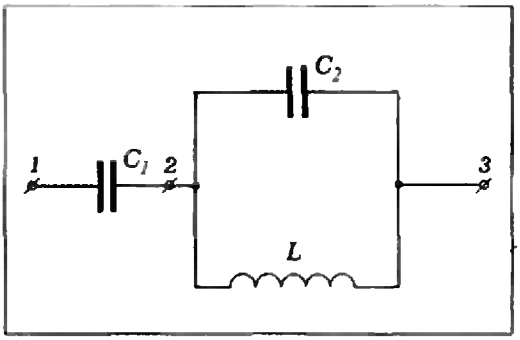


Рис. 12.

энергии при столкновении движущегося шара с неподвижным, установленным на горизонтальном участке лотка. Объясните полученные результаты.

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, набор из двух алюминиевых, одного стального и двух пластмассовых шаров с заданными массами, лоток дугообразный, листы белой и копировальной бумаги, линейка масштабная.

2. Определите схему «черного ящика», содержащего 3 одинаковых резистора и 2 диода, и сопротивления резисторов.

Оборудование: коробочка с тремя выводами, омметр, диод (такой же, как в коробочке).

10 класс

1. Определите параметры элементов в предложенной вам электрической цепи (рис. 12).

Оборудование: электрическая цепь, состоящая из двух конденсаторов и катушки индуктивности, авометр, звуковой генератор, соединительные провода.

2. Определите оптическую схему «черного ящика» и возможные параметры оптических элементов, находящихся в нем.

Оборудование: коробочка с шестью отверстиями, линейка масштабная, 4 булавки, подъемный столик, бумага.

В этом номере журнала помещена статья В. Орлова, в которой приводятся решения экспериментальных задач и дается анализ выполнения работ участниками олимпиады. Однако советуем вам, прежде чем читать статью В. Орлова, попробовать самим решить эти задачи. Безусловно, ваши учителя физики помогут вам достать нужное оборудование в физическом кабинете и приготовить все необходимое для проведения эксперимента. Попытайтесь!

Проверив экспериментальные работы участников олимпиады, жюри подвело итоги. 18 апреля на торжественном закрытии олимпиады председатель Центрального жюри олимпиады по физике профессор Московского физико-технического института С. Козел объявил результаты.

Имена победителей, получивших Дипломы I, II и III степени, приведены на странице 83 этого номера журнала.

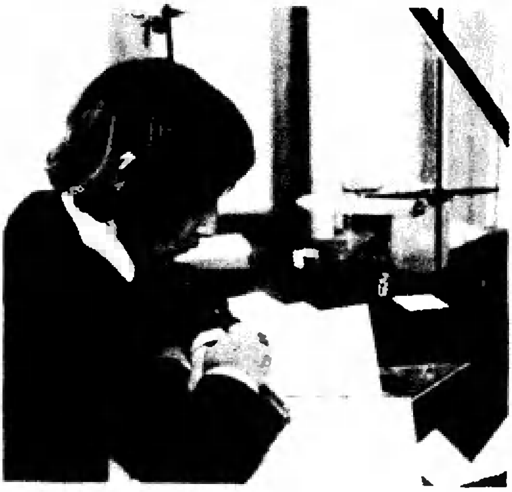
Многие участники олимпиады награждены различными грамотами и призами. Грамоты Центрального оргкомитета Всесоюзной олимпиады получили 42 участника.

Специальные призы присуждены *С. Мигинскому* (Новосибирск) — за лучшее решение задач теоретического тура, *А. Товмасяну* (Ереван), *К. Кленину* (Саратов) и *Д. Ковригину* (Ломоносов) — за лучшее выполнение работ экспериментального тура.

Редколлегия и редакция журнала «Квант» учредили специальный приз — подшивку журнала с автографом главного редактора академика И. Кикоина. В этом году этот приз получил семиклассник из Гомеля *А. Ляпин*, выступивший за 8 класс.

XII Всесоюзная олимпиада школьников по физике закончилась. Участники ее надолго запомнят гостеприимство Туркменской земли, теплые встречи с учеными Туркмении, ее славными, добрыми людьми. Хозяева олимпиады — ученые Туркмении, комсомольцы, все, кто помогал в ее проведении, — сделали очень многое, чтобы олимпиада прошла успешно. Не только рабочие часы, но и досуг школьников был организован интересно. В этом большую роль сыграл комитет комиссаров, созданный ЦК ЛКСМ Туркмении.

Через год — XIII Всесоюзная олимпиада. И вы сможете стать ее участниками. Для этого надо много работать, работать систематически, целеустремленно. Желаем успехов!



Победители олимпиады по физике, получившие Дипломы I степени: А. Морозов, В. Яковенко (во втором ряду), Е. Пономарев, М. Гаврилов, М. Светлов, В. Бикташев, С. Мигинский, А. Ляпин, М. Севрюк.

О. Кукингас, получивший Диплом I степени, за выполнением экспериментальной задачи.

Идет эксперимент.

Вручение наград и призов.

В. Орлов

Экспериментальные задачи олимпиады по физике

16 апреля в лабораториях физического факультета Туркменского государственного университета проходил экспериментальный тур заключительного этапа XII Всесоюзной олимпиады школьников по физике. Каждому участнику предлагалось решить две экспериментальные задачи. Решения и анализ выполнения этих задач участниками олимпиады приводятся ниже.

8 класс

Задача 1. *Определите отношение плотностей жидкостей.*

Оборудование: рычаг-линейка, два груза, два сосуда с различными жидкостями, штатив с муфтой и лапкой. (В качестве грузов использовались алюминиевый кубик массой 100 г и стальная гирька массой 100 г; в качестве жидкостей — подкрашенная вода и раствор соли.)

Решение. Метод сравнения плотностей жидкостей основан на зависимости абсолютных значений F_{A_1} и F_{A_2} архимедовых сил от плотностей ρ_1 и ρ_2 жидкостей, в которые погружают груз объемом V:

$$F_{A_1} = \rho_1 Vg, \quad F_{A_2} = \rho_2 Vg.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{F_{A_1}}{F_{A_2}}.$$

Уравновесив грузы на рычаге, устанавливаем, что массы грузов одинаковы.

Опустив алюминиевый кубик в первую жидкость (рис. 1, *а*), уравновешиваем грузы на рычаге:

$$(mg - F_{A_1})\,l = mgl_1. \qquad (1)$$

Заменив сосуд с жидкостью, не меняя плеча l, вновь уравновешиваем грузы (рис. 1, *б*):

$$(mg - F_{A_2})\,l = mgl_2. \qquad (2)$$

Из условий (1) и (2) находим

$$\frac{F_{A_1}}{F_{A_2}} = \frac{l - l_1}{l - l_2} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{l - l_1}{l - l_2}.$$

Относительная погрешность измерения отношения ρ_1/ρ_2 равна

$$\varepsilon_{\rho_1/\rho_2} = \varepsilon_{l-l_1} + \varepsilon_{l-l_2} =$$

$$= \frac{h_l + h_{l_1}}{l - l_1}100\% + \frac{h_l + h_{l_2}}{l - l_2}100\%, \qquad (3)$$

где h_l, h_{l_1} и h_{l_2} — абсолютные погрешности измерения длин плеч.

От чего зависит значение величины $\varepsilon_{\rho_1/\rho_2}$? Значения h_l, h_{l_1} и h_{l_2} определяются точностью измерительного инструмента (линейки). Из выражения (3) видно, что чем меньше различие в длинах l и l_1, l и l_2, тем больше относительная погрешность измерений. Отсюда следует, что для повышения точности измерений следовало в сосуды с жидкостями опускать именно алюминиевый кубик, а не стальную гирьку, так как вследствие большего объема кубика на него будет действовать бо́льшая архимедова сила, что, в свою очередь, приведет к большему различию длин l, l_1 и l_2. С этой же целью длину плеча l следовало выбирать максимально большой для данного рычага. Производить несколько опытов с различными плечами рычага, опускать в жидкости оба груза поочередно, а затем усреднять результат смысла не имело, так как это заведомо ухудшало точность измерений. Часть учеников при переносе груза из одной жидкости в другую изменяла плечо l силы $m\vec{g} + \vec{F}_A$. Это приводило к более сложной расчетной формуле, к дополнительным погрешностям измерений, увеличивало вероятность расчетных ошибок.

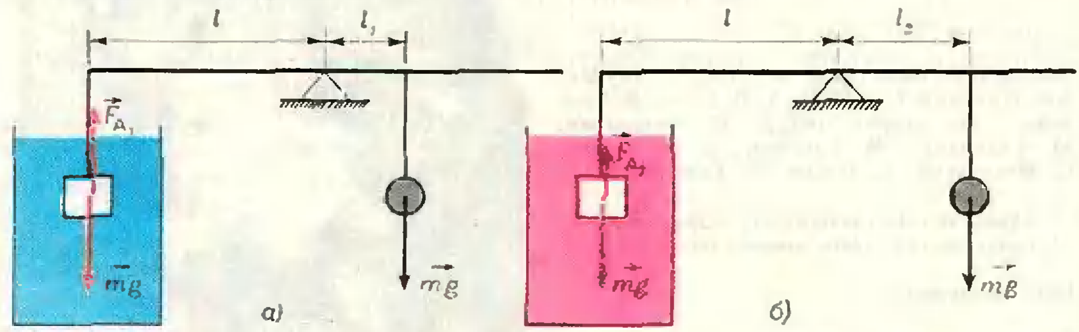


Рис. 1.

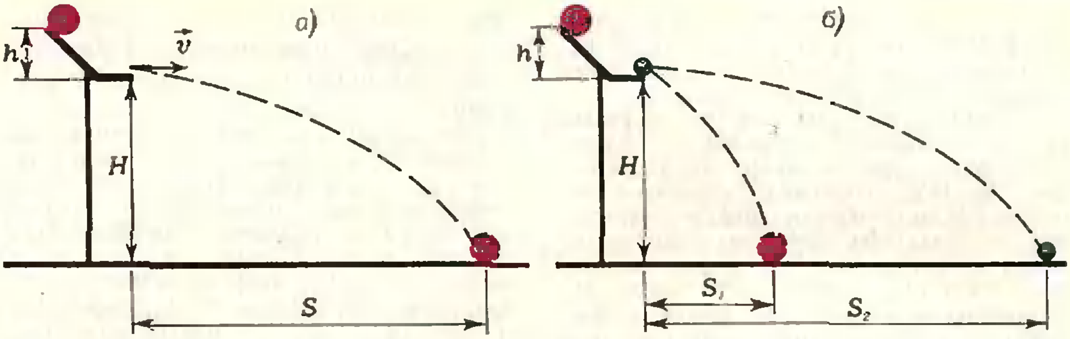


Рис. 2.

Задача 2. *Проверьте экспериментально выполнение закона сохранения импульса при столкновении движущегося шара с неподвижным, установленным на горизонтальном участке лотка. Объясните полученные результаты.*

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, лоток дугообразный, набор из двух пластмассовых и двух стальных шаров с заданными массами, листы белой и копировальной бумаги, линейка масштабная.

Решение. Простейшая методика выполнения эксперимента заключается в следующем. С помощью *листов белой и копировальной бумаги* фиксируется место падения шара при его скатывании по свободному лотку и измеряется дальность полета S шара (рис. 2, *а*). Начальная скорость шара к моменту начала свободного полета равна $v=S/t$, где t — время падения шара.

Поставив на горизонтальный участок лотка второй шар, измеряем дальности полета S_1 и S_2 обоих шаров после их столкновения (рис. 2, *б*). Скорости шаров после столкновения равны $v_1=S_1/t$ и $v_2=S_2/t$. Так как время падения шаров во всех опытах одинаково, для проверки закона сохранения импульса достаточно проверить выполнение соотношения

$$m_1S = m_1S_1 + m_2S_2. \qquad (*)$$

где m_1 и m_2 — массы сталкивающихся шаров.

Для того чтобы сделать вывод о выполнимости или невыполнимости закона сохранения импульса в этом эксперименте, следовало сравнить относительные погрешности измерений расстояний (S, S_1, S_2) с относительным отклонением левой и правой частей выражения (*).

Относительная погрешность измерения дальности полета $\varepsilon_S = (h_S/S)\,100\%$ (h_S— абсолютная погрешность). Следовательно, для уменьшения значения ε_S нужно подбирать условия эксперимента так, чтобы значение S было максимально велико. С этой целью лоток следовало поднять на всю высоту штатива, а шар отпускать с верхней точки лотка.

Для пластмассовых шаров, скатывающихся с лотка, отклонение левой и правой частей выражения (*) оказывалось существенно бо́льшим погрешностей измерений — импульс шаров после удара возрастал! Причина невыполнения закона сохранения импульса в данном случае заключается в том, что шар при скатывании с лотка вращается. При столкновении пластмассовых шаров одинаковых масс движущийся шар в момент удара останавливается, полностью передавая свой импульс второму шару. Однако за счет энергии вращательного движения, запасенной при скатывании, первый шар снова начинает двигаться по горизонтальному участку лотка. Вследствие этого правая часть (*) оказывается больше, чем того требовал бы закон сохранения импульса.

Для стальных шаров закон сохранения импульса в пределах погрешностей измерений выполняется, так как гладкие стальные шары соскальзывают с лотка.

Эта задача оказалась для восьмиклассников значительно труднее первой. Только треть из них выбрала простейшую методику выполнения эксперимента, приводящую к расчетной формуле (*). Многие учащиеся измеряли высоту падения шара H, вычисляли время падения шара $t = \sqrt{2H/g}$ и его скорость $v = S/\sqrt{2H/g}$. Подобный путь приводил к увеличению погрешностей измерений.

Большинство учеников не рассчитывало погрешностей измерений и отклонения левой и правой частей (*), достигающие 10—15%, объясняли ошибками измерений (в то время как ошибки измерений при оптимальных условиях проведения опыта не превышали 5%). Очень досадно, что некоторые ребята, обнаружив эти значительные отклонения, просто «подогнали» результаты Лишь немногие обратили внимание на факт возрастания импульса шаров после удара, но не смогли его объяснить.

9 класс

Задача 1. *Проверьте экспериментально выполнение законов сохранения импульса и энергии при столкновении движущегося шара с неподвижным, установленным на горизонтальном участке лотка. Объясните полученные результаты.*

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, набор из двух алюминиевых, одного стального и двух пластмассовых шаров с заданными массами, лоток дугообразный, листы белой и копировальной бумаги, линейка масштабная.

Решение. Та же методика, что и в задаче 2 для 8-х классов, приводит к следующим расчетным формулам (рис. 2,*б*): для проверки закона сохранения импульса —

$$m_1S = m_1S_1 + m_2S_2, \qquad (*)$$

для проверки закона сохранения энергии —

$$m_1S^2 = m_1S_1^2 + m_2S_2^2. \qquad (**)$$

Однако эти выражения получены в приближении «шар — материальная точка», которое в условиях данной задачи было не всегда корректно. В зависимости от материала шара и качества его обработки, шар проходит различные пути в режимах скольжения и качения. Чем больше проскальзывание шара при его движении по лотку, тем лучше выполняются законы сохранения импульса и энергии в этом опыте. Наибольшее проскальзывание было у стального шарика, наименьшее — у алюминиевого. В этом легко было убедиться, отпуская с одной и той же высоты стальной, пластмассовый и алюминиевый шары. Стальной шар при этом летит существенно дальше других — большая часть его потенциальной энергии превращается в кинетическую энергию поступательного движения.

Основные замечания по выполнению этой работы, в основном, те же, что и в задаче 2 для 8-х классов Однако, если расхождения в выполнении закона сохранения импульса (в форме (*)) достигали 10—15%, то расхождения в выполнении закона сохранения энергии (в форме (**)) достигали 40% и более (!). И даже такие отклонения не смутили многих учеников, которые пытались «подогнать» свои результаты под незыблемые законы сохранения.

Лишь немногие ученики, поставив серию опытов, сумели качественно объяснить отклонения в выполнении законов сохранения импульса и энергии вращением шара. Один ученик — Олег Ющук (145-я средняя школа г. Киева), сделав правильный вывод о причинах невыполнения закона сохранения энергии (в форме (**)), сумел количественно определить долю k первоначальной (потенциальной) энергии скатывающегося шара, переходящей в кинетическую энергию вращения:

$$k = \frac{E_{\text{вр}}}{mgh} = \frac{mgh - mv^2/2}{mgh}, \qquad (3)$$

где h — высота скатывания шара (рис. 3), v — скорость его поступательного движения, определяемая выражением

$$v = \frac{S}{t} = \frac{S}{\sqrt{2H/g}}. \qquad (4)$$

Из выражений (3) и (4) следует

$$k = \frac{mgh - mgS^2/4H}{mgh} = 1 - \frac{S^2}{4Hh}.$$

Опыты показали, что для стального шара коэффициент k мал и близок к 0,1 (практически отсутствует качение; при полном проскальзывании вся потенциальная энергия шара превращается в кинетическую энергию поступательного движения). Для пластмассового шара $k = 0{,}3$—$0{,}35$. Для алюминиевого $k = 0{,}4$ (качение без проскальзывания)

Полный количественный расчет эксперимента с учетом вращательного движения учащиеся 8—9 классов не проводили, но это и не требовалось. Важнее было «честно» провести опыты и дать объяснение полученным результатам, подтверждая свои объяснения контрольными опытами.

Задача 2. *Определите схему «черного ящика», содержащего 3 одинаковых резистора и 2 диода, и сопротивления резисторов.*

Оборудование: коробочка с тремя выводами, омметр, диод (такой же, как в коробочке).

Решение. Измерения сопротивлений с помощью омметра (положение его переключателя «× 1000»)

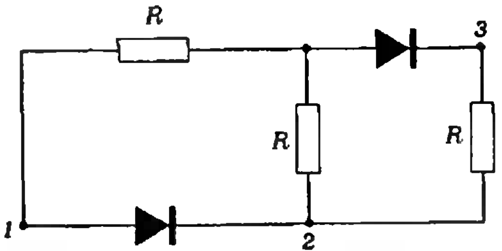


Рис. 3.

при подключении его к двум попарно различным выводам дали следующие значения:

$$R_{12} = 2\ \text{кОм},\quad R_{21} = 30\ \text{кОм},$$
$$R_{13} = 8\ \text{кОм},\quad R_{31} = 45\ \text{кОм},$$
$$R_{23} = 8{,}5\ \text{кОм},\quad R_{32} = 15\ \text{кОм}.$$

Сопротивление участка *1—2* с подключенным к нему «пробным» диодом оказалось равным 4 кОм.

Анализ результатов измерений позволяет сделать следующие выводы.

а) На участке *1—2* цепи включены диод и параллельно ему резистор (резисторы?) с сопротивлением 30 кОм. Сопротивление диода в прямом направлении $R_\text{д} = 2$ кОм.

б) На участке *2—3* цепи включен резистор с сопротивлением 15 кОм и параллельно ему — диод и резистор (15 кОм). Сопротивление R'_{23} участка *2—3* с последовательно подключенным к нему «пробным» диодом оказалось равным 12,5 кОм: $R'_{23} = R_{23} + R'_\text{д} = 12{,}5$ кОм, откуда $R'_\text{д} = 12{,}5$ кОм − 8,5 кОм = 4 кОм. Правильность вывода б) подтверждает прямая проверка: $R_{23} = 8{,}5$ кОм.

Этот результат позволяет уточнить вывод а): на участке *1—2* параллельно с диодом включены два резистора с сопротивлением по 15 кОм.

в) Значение $R_{31} = 45$ кОм говорит о том, что в направлении *3—1* диоды закрыты и в цепи «работают» три последовательно включенных резистора с сопротивлениями по 15 кОм.

Схема, заключенная в «черный ящик», — такая, как на рисунке 3.

Определить схему «черного ящика» удалось только 10 учащимся. Во многих работах повторялась одна и та же ошибка, связанная с неверным измерением сопротивления диода. Так как диод — нелинейный элемент, его сопротивление существенно изменяется в зависимости от величины протекающего тока. Следовательно, обязательно нужно было измерять сопротивление диода в прямом направлении при подключении его последовательно к различным клеммам «черного ящика». Такие измерения давали различные значения $R_\text{д}$ в зависимости от режима, в котором производились измерения ($R_{\text{д}1-2} = 2$ кОм, $R_{\text{д}2-3} = 4$ кОм).

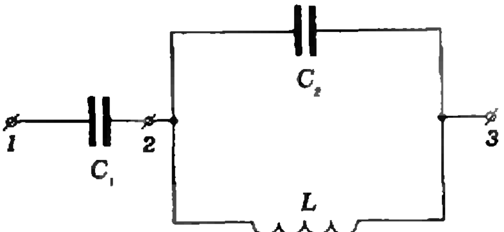


Рис. 4.

10 класс

Задача 1. *Определите параметры элементов в предложенной вам электрической цепи.*

Оборудование: электрическая цепь, состоящая из двух конденсаторов и катушки индуктивности (рис. 4), авометр, звуковой генератор, соединительные провода.

Решение. Наиболее удачную методику измерения, позволившую правильно определить все параметры схемы, предложил Дмитрий Ковригин — ученик 1-й средней школы г. Ломоносова Ленинградской области. Выделим основные этапы этой методики.

а) Определение емкости конденсатора C_1.

Генератор подключаем к клеммам *1—2*, измеряем при частоте ν_1 напряжение U_1 на конденсаторе C_1 с помощью авометра. Затем авометр в режиме амперметра включаем последовательно с конденсатором C_1, генератор подключаем к клеммам *1—2*, измеряем силу тока I (рис. 5, *а*). Зная частоту изменения тока (частоту генератора) ν_1, определяем C_1:

$$I = \frac{U_1}{X_{C_1}} = U_1 2\pi\nu_1 C_1,\quad C_1 = \frac{I}{2\pi\nu_1 U_1}.$$

Эти измерения следовало проводить при низких частотах, так как при высоких частотах генератор закорачивается малым сопротивлением X_{C_1} конденсатора C_1 и уменьшается выходное напряжение генератора (изменяется U_1). Чтобы быть уверенным, что этого не происходит, надо построить график зависимости $I(\nu)$ и

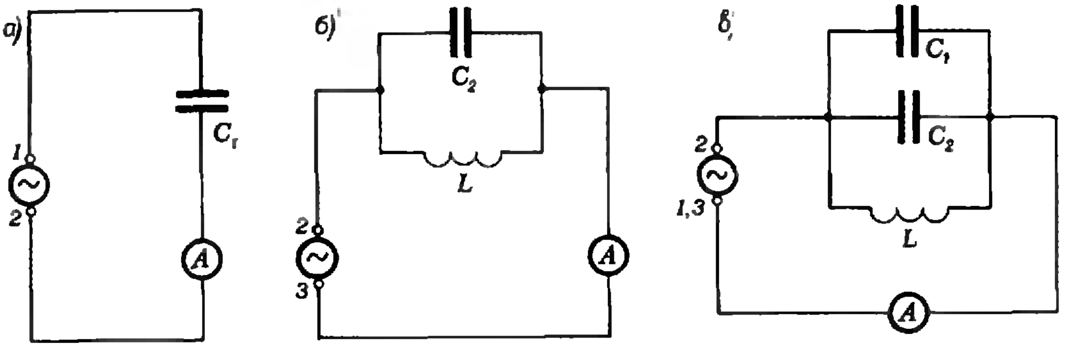


Рис. 5.

убедиться, что частота ν_1, при которой измерялось значение U_1, соответствует линейному участку графика $I(\nu)$.

б) Определение индуктивности L и емкости C_2.

Подключаем генератор к клеммам *2—3* и авометр в качестве амперметра (рис. 5, *б*). Изменением частоты генератора добиваемся минимальной силы тока в цепи. Частота ν_p, при которой наступает резонанс, связана с параметрами контура:

$$\nu'_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}}.$$

Замыкаем клеммы *1—3*, включаем авометр в качестве амперметра, подключаем генератор к клеммам *2 — (1, 3)* (рис. 5, *в*). Изменяя частоту генератора, находим резонансную частоту $\dot{\nu}_p$:

$$\dot{\nu}_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1+C_2)}}.$$

Найденные значения частот ν_p и $\dot{\nu}_p$ позволяют рассчитать L и C_2.

в) Активное сопротивление катушки (потери на меди) легко измеряется с помощью авометра, подключенного в режиме омметра к клеммам *2—3*.

При данной методике амперметр служит лишь индикатором для обнаружения минимума тока. Прямые измерения силы тока и напряжения не проводятся, что существенно уменьшает погрешности измерений (сопротивление амперметра порядка 0,5 кОм). Кроме того, частоты ν_p и $\dot{\nu}_p$ измеряются при малых токах, вследствие чего напряжение на выходе генератора практически не изменяется. Величина индуктивности катушки (медный провод, намотанный на ферритовое кольцо) при данной методике также не изменяется.

Значительная часть десятиклассников предложила «лобовое» решение задачи: решение системы уравнений в комплексных амплитудах для двух произвольных значений токов и напряжений. Однако этот метод оказался совсем непригодным. Большие погрешности при определении силы тока и напряжения с помощью одного авометра и сложные расчеты привели к грубейшим ошибкам в измерении емкости конденсатора C_2 (до 1000 мкФ!) и индуктивности L (до 11 000 Г!). Самым неприятным является тот факт, что эти невероятные значения не вызвали удивления ребят. Очень многие ученики пытались производить усреднение результатов, полученных при различных условиях. Эта операция не имеет никакого смысла, ибо усреднением можно убрать лишь случайную ошибку измерений, а не систематическую, вызванную несовершенством методики выполнения работы.

Были предложены и другие способы определения параметров цепи. Однако все они по точности измерений значительно уступают описанному нами выше методу.

Задача 2. *Определите оптическую схему «черного ящика» и возможные параметры оптических элементов, находящихся в нем.*

Оборудование: коробочка с шестью отверстиями, линейка масштабная, 4 булавки, подъемный столик, бумага.

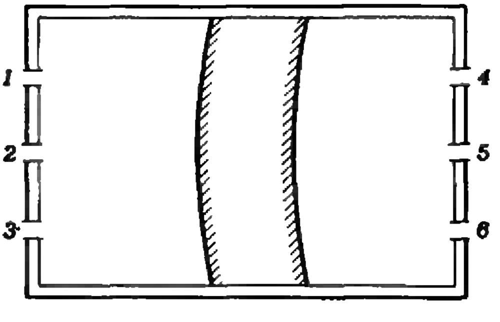


Рис. 6.

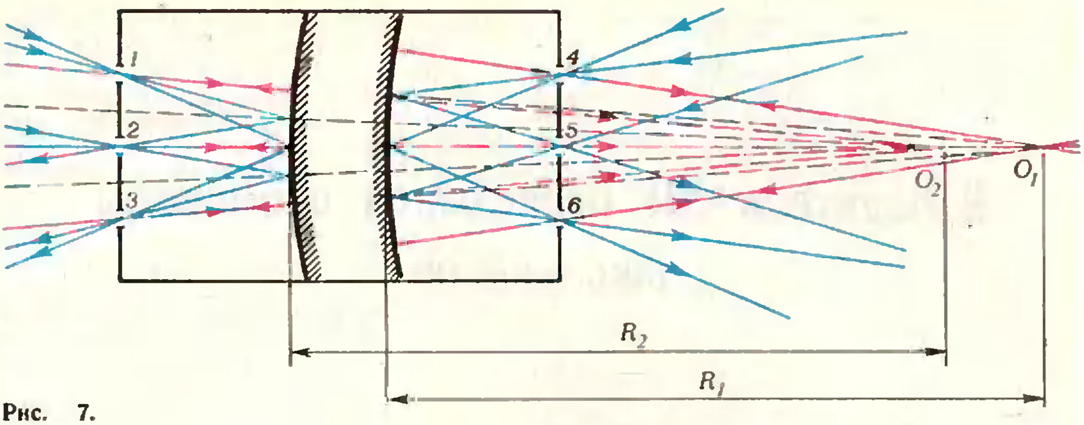


Рис. 7.

Решение. В «черном ящике» находилось вогнуто-выпуклое зеркало с радиусами кривизны $R_1 = R_2 = 21$ см (рис. 6).

В том, что в коробочке находится зеркало, легко можно убедиться, глядя в отверстия *1*, *2*, *3* сначала при открытых отверстиях *4*, *5*, *6*, а затем при закрытых и не обнаруживая никаких изменений при этом.

Стандартным решением явилось построение хода падающих и отраженных от зеркала лучей. Для этого с помощью булавок отмечались направления, по которым через одно отверстие были видны два других отверстия. Пересечение соответствующих направлений (синие линии на рисунке 7) дает положение трех точек зеркала с одной стороны и трех точек зеркала с другой. Биссектрисы углов между падающим и отраженным лучами дают положение перпендикуляров к поверхности зеркала, пересечение перпендикуляров — центр кривизны. Измерение расстояния от центра кривизны до поверхности зеркала дает искомую величину радиуса зеркала.

Описанная методика выполнения работы дает тем большую точность, чем меньше радиус кривизны зеркальной поверхности. В данном случае радиус кривизны был довольно большой, и поэтому необходимо было точно выполнять построение хода лучей.

С этой работой успешно справились только 13 десятиклассников из 49. Основной ошибкой, которая не позволила получить правильную оптическую схему «черного ящика», был небрежно сделанный чертеж с построением хода лучей.

Удачную методику определения оптического центра зеркал выбрали Сергей Мигинский (145-я средняя школа Новосибирска) и Евгений Пономарев (82-я средняя школа п. Черноголовка Московской области). После того как стандартным методом были найдены точки зеркальной поверхности, определялись направления (красные линии на рисунке 7), по которым были видны те же отверстия, через которые производилось наблюдение. С этой целью булавка ставилась таким образом, чтобы изображение булавки, сама булавка, отверстие и глаз находились на одной прямой. Это возможно, если луч проходит через оптический центр зеркала. Сделав подобные построения из других двух отверстий, получаем оптический центр зеркала в месте пересечения построенных прямых. Из рисунка 7 видно, что в одном случае эти прямые сходятся (вогнутое зеркало), а в другом расходятся (выпуклое зеркало). Измерение расстояний от полученных точек O_1 и O_2 до зеркала дает искомые значения радиусов кривизны зеркальных поверхностей. Описанный метод прямого определения оптического центра зеркальных поверхностей дает бо́льшую по сравнению со стандартной методикой точность при малой кривизне этих поверхностей.

Победители XII Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Балинский А. (Львов, с. ш. № 11),
Боричев А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Разборов А. (Москва, с. ш. № 2),
Ткаченко Ю. (Киев, ФМШ № 145);

по 9 классам—

Захаревич И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Лысенок И. (Москва, ФМШ № 18),
Рудковский И. (Киев, ФМШ при КГУ),
Хлебутин С. (Москва, ФМШ № 18);

по 10 классам—

Гальперин В. (Москва, с. ш. № 57),
Книжник В. (Москва, с. ш. № 2),
Лихтинен И. (Москва, ФМШ № 18).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Авербах И. (Челябинск, с. ш. № 121),
Артюшкин И. (Пенза, с. ш. № 16),
Братченко С. (х. Бойко-Понура Краснодарского края),
Василевский С. (Ашхабад, п. Фирюза, с. ш. № 30),
Добров Б. (Ангарск, с. ш. № 10),
Лавров П. (Ленинград, с. ш. № 207),
Лацис С. (Стучка, с. ш. № 2),
Лернер Л. (Вильнюс, с. ш. № 8),
Лучко Ю. (д. Слонатичи Гродненской обл),
Рухадзе К. (Обнинск, с. ш. № 1);

по 9 классам—

Буякевич А. (с. Родинское Донецкой обл., с. ш. № 8),
Измайлов Р. (Баку, с. ш. № 134),
Канепс Я. (Рига, с. ш. № 2),
Карагулян Г. (Ереван, ФМШ № 1),
Касаковскис Я. (Рига, с. ш. № 1),
Кордюков Ю. (Серов, с. ш. № 14),
Ляховец А. (Москва, ФМШ № 18),
Нестеренко Н. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Новосельцева Т. (Москва, с. ш. № 7),
Суворова Н. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Хютть Урмас (Нью)

по 10 классам—

Аронов Б. (Саратов, с. ш. № 13),
Бугаенко В. (Киев, ФМШ при КГУ),
Жердев А. (Славянск, с. ш. № 5),
Изюмченко М. (Москва, ФМШ № 18),
Корчинов С. (Ангарск, с. ш. № 10),
Ктитарев Д. (Дубна Московской обл., с. ш. № 8),
Лисничук Л. (Васильевская с. ш. № 8),
Нейман В. (Ленинград, ФМШ № 45),
Оревков С. (Москва, с. ш. № 57),
Харенко С. (Ангарск, с. ш. № 10),
Якубович Д. (Ленинград, ФМШ № 45).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Владимиров И. (Куйбышев, с. ш. № 144),
Попелюхин А. (Киев, ФМШ при КГУ),
Радченко В. (Киев, ФМШ при КГУ),
Синцов В. (п. Комсомольский Тюменской обл., с. ш. № 1);

по 9 классам—

Амброладзе М. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Бодров С. (Димитровград, с. ш. № 25),

Долинский С. (Целиноград, с. ш. № 11)
Иванов Ю. (Ленинград, с. ш. № 30),
Кузьмин Е. (Череповец, с. ш. № 4),
Лиманаускас В. (Вильнюс, с. ш. № 40),
Облаков И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Ротару В. (с. Сесены Молдавской ССР),
Убайдуллаев Р. (Ташкент, с. ш. № 5);

по 10 классам—

Бахтин В. (Воронеж, с. ш. № 58),
Гохберг А. (Москва, с. ш. № 57),
Камолова Э. (Ташкентская обл., свх. Свердлова),
Коган А. (Донецк, с. ш. № 13),
Мамедов Г. (Баку, с. ш. № 160),
Надежин Д. (Курган, с. ш. № 47),
Ненашев А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Озола З. (Рига, с. ш. № 1),
Остров Г. (Барановичи, с. ш. № 16),
Шейдвассер О. (Оренбург, с. ш. № 2),
Шулембаев Д. (Алма-Ата, РФМШ).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Кунингас О. (Таллин, с. ш. № 1),
Ляпин А. (Гомель, с. ш. № 33, 7 кл.),
Светлов М. (Пермь, с. ш. № 25);

по 9 классам—

Гаврилов М. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Севрюк М. (Москва, с. ш. № 2);

по 10 классам—

Бикташев В. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Мигинский С. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Морозов А. (Москва, с. ш. № 179),
Пономарев Е. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Яковенко В. (Киев, ФМШ № 145).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Заневский А. (Ленинград, с. ш. № 127),
Китаев А. (Воронеж, с. ш. № 58),
Одинцов А. (Москва, с. ш. № 2),
Перлов А. (Киев, ФМШ № 145),
Пивоваров В. (Красноярск, с. ш. № 10);

по 9 классам—

Васильев А. (Чебоксары, ФМШ № 2),
Мирлин А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Чикин Д. (Москва, ФМШ № 18),
Шпилькин С. (Москва, ФМШ № 18),
Ющук О. (Киев, ФМШ № 145),
Ясонов И. (Москва, ФМШ № 18);

по 10 классам—

Забродин А. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Макушок Ю. (Минск, с. ш. № 75),
Смышляев В. (Ленинград, с. ш. № 239),
Шептовецкий А. (Москва, с. ш. № 2).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Долганов А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Погосов А. (Ташкент, с. ш. № 110),
Усов В. (Томск, с. ш. № 6),
Устинов Е. (Калининград, с. ш. № 43),
Чичинов А. (п. Красногорск Янгиабадского р-на УзССР, с. ш. № 8),
Юшкайтис Р. (Вильнюс, с. ш. № 9);

по 9 классам—

Александров Н. (Ленинск Кзыл-Ординской обл., с. ш. № 222),
Бараз Л. (Свердловск, с. ш. № 9),
Батыршин Ш. (Ленинград, ФМШ № 45),
Гордиенко С. (Смолевичи, с. ш. № 2),
Зудин Е. (Александров, с. ш. № 4),
Кленин К. (Саратов, с. ш. № 13),
Кривицкий В. (Харьков, с. ш. № 27),
Ульмасов Т. (Душанбе, с. ш. № 8),
Фрадкин Я. (Уфа, с. ш. № 114),
Цыпин М. (Москва, с. ш. № 2);

по 10 классам—

Вайсбурд И. (Томск, с. ш. № 6),
Водостоев Д. (Воронеж, с. ш. № 15),
Клишко В. (Винница, с. ш. № 2),
Ковригин Д. (Ломоносов, с. ш. № 1),
Кушнир Л. (Астрахань, с. ш. № 10),
Нестеренко А. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Пикшрис Р. (Вильнюс, с. ш. № 22),
Ханелес А. (Самарканд, с. ш. № 67).

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М476—М495 и Ф478—Ф492 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Большинство читателей, приславших решение задач **М481, М488а**), решили их верно. Остальные задачи решили: *К. Абдухаликов* (Алма-Ата) 78, 80а), 83, 88, 89, 91; *А. Агаев* (с. Покровка АзССР) 79а), 83, 86, 91, 93; *Д. Агиев* (с. Зарнава АзССР) 83, 88б), е); *С. Азнабаев* (Новотроицк) 89, 91; *В. Айриян* (Раздан) 91, 93; *Г. Аксуян* (Евпатория) 91, 93, 94; *Ф. Алиев* (Баку) 91; *Е. Альтерман* (Львов) 80а), б), 86, 88, 91, 93; *К. Аминов* (Казань) 91; *П. Анев* (НРБ) 89; *И. Аполонский* (Жуковский) 86; *И. Артюшкин* (Пенза) 91; *К. Архангельский* (Киев) 76, 88е), 91, 92; *Р. Атангулов* (с. Юлдыбаево БАССР) 83; *И. Ахметов* (Москва) 86, 87, 88б), в); *А. Бадалян* (пос. Берд АрССР) 83, 84, 86, 88б), в), д), 89, 91; *Б. Байсакалов* (Алма-Ата) 88б), в); *К. Бакланов* (Тула) 89; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) 76, 80а), б), 85а), б), 86, 88б), 89; *В. Батырев* (Москва) 82, 83, 85а) — в), 88, 89, 91—93, 94а); *Б. Бегун* (Москва) 89, 91; *А. Бекжанов* (Алма-Ата) 91; *З. Бектембаева* (с. Коммунизм. Таны КазССР) 91; *Ю. Беляев* (Ленинград) 91; *М. Бествина* (СФРЮ) 78, 80а), в), 85а)—д), 86, 88, 89; *И. Бовсуновский* (с. Путиловичи Житомирской обл.) 83, 91; *Г. Бокк* (Воронеж) 85а) — д), 91, 93; *О. Боконов* (Кобрин) 91, 93; *В. Болотников* (Харьков) 76, 83, 89, 91; *А. Боричев* (Ленинград) 91, 93; *И. Бородин* (Соликамск) 91; *А. Бржезинска* (ПНР) 88, 89, 91; *А. Броварник* (Кривой Рог) 91; *С. Буга* (Ульяновск) 86, 87, 88б), в), 89, 93; *Б. Вайсберг* (Обнинск) 86, 88б), в), 91; *А. Васильев* (Саратов) 83, 85а) — в), 86, 88б), в), 89, 91, 94а); *В. Виноградов* (Казань) 87, 88б), в); *И. Власов* (Мичуринск) 91; *Д. Воса* (п/о Лиепа ЛатССР) 91; *А. Галенко* (Пенза) 91; *Э. Гасанов* (Али-Байрамлы) 91; *Э. Гасанов* (Тауз) 91; *К. Гедалин* (Тбилиси) 91; *М. Гальперин* (Ленинград) 83, 84; *А. Гельфгат* (Рига) 80а); *А. Гильман* (Москва) 84, 85а) — в), 86, 88б), в), 89, 91—93, 94а); *Ю. Глухов* (Щелково) 91; *О. Головинская* (Киев) 91; *В. Голубенко* (Черкесск) 91; *О. Гордиенко* (Павлодар) 89, 91, 93; *Г. Грабарник* (Ташкент) 86, 88д), е) 89, 91, 92, 93; *В. Григоров* (Москва) 86, 87, 88б), в), 89; *Н. Гринберг* (Киев) 91; *С. Гришечкин* (Москва) 76—80; *Д. Грязнов* (Днепропетровск) 83, 85а) — в); *В. Губа* (Вологда) 78, 79, 80а), 82, 83, 85а), д), 86—93, 94а), 95а); *А. Даценко* (Харьков) 91; *А. Дедков* (Омск) 78б), 79, 80а); *В. Джилоян* (с. Чишан АрССР) 88б, в), д), 89, 93; *М. Джафаров* (Кировабад) 88б), е), 91; *В. Димантман* (Баку) 91; *О. Дмитриев* (Саратов) 83, 85а), б), 86, 88б), в), 89, 91, 94а); *А. Дороговцев* (Киев) 83, 84, 89, 91; *А. Дорошенко* (Пермь) 89, 91; *Ю. Дудко* (Симферополь) 91; *И. Ермилов* (Красноярск) 89, 91; *С. Железовский* (Саратов) 78; *Н. Жернаков* (Золотоноша Черкасской обл.) 91, 93; *В. Живаев* (Ташкент) 78, 83, 84, 86, 88, 91, 93; *В. Забелин* (Саратов) 78б), 83; *Р. Заботцки* (ПНР) 92; *И. Зверович* (Минск) 80а) — в), 83; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) 78а), б), 79а), 80а), в), 86, 89, 94а); *М. Златоустовский* (с. Правая Хава Воронежской обл.) 83, 89, 91; *Я. Золотарев* (Ташкент) 76а), 78а), б), 80а); *Е. Зубова* (Пермь) 78; *М. Ибрагимов* (Шуша) 91; *О. Ижболдин* (Ленинград) 91—93; *Р. Измайлов* (Баку) 76—80; 84, 89, 91, 93; *И. Искендеров* (С. Нюсиюс НахАССР) 88б), в), 91; *А. Исмаилов* (с. Чайра-суллу АзССР) 91; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) 80а), 83, 85а), б), 86, 88б), в), 91—93; *Я. Канепс* (Лиелварде ЛатССР) 91, 94а); *А. Каплан* (Сумгаит) 83, 91, 94а); *Ю. Каплунов* (Москва) 86, 88б), в), 89; *Г. Карагулян* (Ереван) 91, 93; *Ч. Карибов* (с. Вандам АзССР) 91; *П. Каталымов* (Алма-Ата) 83, 88б), в); *А. Кац* (Ташкент) 77—79, 80а), 83, 94; *Г. Квернадзе* (Тбилиси) 91; *И. Кевхишвили* (Тбилиси) 78б, 79а), 91; *А. Келарев* (Свердловск) 83, 91, 92, 94; *А. Керимов* (Москва) 78а), б); *Е. Коган* (Днепропетровск) 91; *И. Коган* (Харьков) 88б), в), 89; *А. Колдашов* (Тбилиси) 91; *С. Колпаков* (Москва) 80а), б), 83, 85а) — в), 91; *И. Коростишевский* (Орск) 91; *И. Кохановский* (Фрунзе) 89, 91; *О. Кравец* (Воронеж) 88б), в), д), е), 91; *В. Крикухин* (Махачкала) 91; *О. Кружалов* (с. Воскресенское Тульской обл.) 83, 87, 88б), в), 91; *О. Крылов* (В. Устюг) 86; *В. Крюкова* (п. Оронгой БурАССР) 91; *О. Кузичкин* (Муром) 88б), в); *С. Кузнецов* (Ангарск) 78а), б), 82, 83, 85а) — д), 86, 87, 89, 91, 92; *Е. Кузьмин* (Череповец) 76а), 78а), б), 79, 80а), 82, 83, 88б), в), 89, 91, 93, 94; *П. Кулаков* (Ангарск) 83; *А. Кулеско* (Донецк) 77, 78а), б), 79, 80а), 83, 85а) — д), 86, 88, 89; *Кулябин* (п. Углеуральский Пермской обл.) 78а), б); *Д. Купчинский* (Павлодар) 91, 93; *В. Ландер* (Одесса) 91; *Е. Лапин* (Алма-Ата) 88б), в), 91, 93; *Ю. Лапуста* (Тернополь) 91, 94; *А. Левитов* (Москва) 93, 94а), 95а) — в); *Р. Лейпус* (Вильнюс) 91; *А. Липин* (Ленинград) 91; *А. Логинов* (Ташкент) 91; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) 88б), в), д), е); *А. Ломтатидзе* (Тбилиси) 89, 91; *А. Ляховец* (Краснодар) 78, 82, 83, 86, 88, 89, 91; *А. Мадоян* (Ереван) 83а); *Ю. Макаров* (Ленинград) 88в), 89, 91, 93, 94, 95а), в); *А. Мамиконян* (св х. Ханджян АрССР) 83, 88б); *М. Марьянович* (СФРЮ) 91; *В. Матчишин* (Целиноград) 93; *В. Машевский* (Одесса) 91; *М. Межиева* (Челябинск) 91; *Р. Мешойрер*

(Москва) 77, 78, 80а), 83, 86, 88 б), в), 89, 91, 93, 94а); *Г. Микаелян* (Кафана) 76; *А. Миндлин* (Саратов) 88б), в), д), 89; *Д. Миндлин* (Ташкент) 78, 79, 83, 86, 88, 89, 91, 93; *А. Мирлин* (Ленинград) 76—79, 80а), б); *А. Молотовщиков* (Тейково) 83; *Б. Монхоо* (Улан-Батор) 91; *С. Морейно* (Москва) 91; *В. Морштейн* (Харьков) 93; *О. Мурсакулийев* (Сназань) 89; *Б. Надеждин* (Долгопрудный) 86, 88, 89, 91, 93, 94а); *Т. Наджафов* (Нахичевань) 88б), в), д), 91; *О. Намазов* (с. Фахрало ГССР) 91; *П. Натапов* (Москва) 89; *Б. Наткович* (Тбилиси) 89; *Н. Нестеренко* (Новосибирск) 85а)—д); *М. Нудельман* (Москва) 76—78, 80а), 82, 83, 85а) — в); *А. Нурсеитов* (Алма-Ата) 91; *И. Облаков* (Ленинград) 76, 78а), б), 79а), 80а), в); *А. Опарин* (Горький) 78а), б) 80а), 82, 83, 88, 91, 92, 94а); *С. Осенний* (Киев) 91; *В. Остапенко* (Алма-Ата) 78а), б); *И. Петренко* (Поти) 86, 89; *С. Печенкин* (Алма-Ата) 91; *В. Подругина* (Ангарск) 91, 93; *И. Пономарев* (Пенза) 86; *А. Попелюхин* (Киев) 76, 91; *В. Потебня* (Винница) 91; *Д. Привальский* (Москва) 91; *С. Пузанов* (Одинцово) 91; *Г. Пунинский* (Бобруйск) 76, 78; *Г. Пуричамиашвили* (Тбилиси) 91; *В. Радченко* (Киев) 91; *З. Райхштейн* (Ярославль) 77—79, 80а), б), 83, 86, 87—89, 91—93; *В. Решетников* (Муром) 91; *Н. Рибарска* (НРБ) 77, 78, 80а); *В. Романовский* (Н. Двор Гродненской обл.) 76, 78а), 80а); *Н. Рубинштейн* (Ленинград) 91; *Г. Рыбкин* (Смоленск) 91; *А. Саблин* (Москва) 76—79, 80а); *И. Савенков* (Лысые горы Саратовской обл.) 78б), 80а), 88б), в), 89, 91; *С. Савченко* (Херсон) 91; *С. Сазонов* (Уфа) 83; *М. Салахли* (с. Сарачло ГССР) 93; *С. Самедов* (с. Зарнава АзССР) 91; *А. Сарчимелия* (Тбилиси) 76—79; *С. Севастюк* (Невинномыск) 83, 85а), в); *М. Севрюк* (Москва) 76а), 77—80, 82, 83, 84, 85а)—д), 86, 88—92, 94; *П. Селиванов* (Семипалатинск) 91; *С. Семенякин* (Киев) 91; *А. Сивацкий* (Ленинград) 86, 89, 91—93, 94а); *С. Сидоренко* (Брянск) 91; *В. Скричевский* (Киев) 91; *В. Смелянский* (Москва) 91; 93; *А. Смыслов* (Конаково) 91; *О. Соболев* (Свердловск) 86, 89; *Ю. Солдатенко* (Пинск) 78а), б); *А. Сромин* (Ленинград) 86, 88б), в), 91; *С. Стадниченко* (Пенза) 80а), 83, 85в), 89, 91; *М. Стрешинский* (Донецк) 91; *М. Струнинский* (Северодонецк) 91, 93; *Г. Субоч* (д. Нарочь Минской обл.) 78а); *Ф. Сухочев* (Ташкент) 86, 88д), е), 89, 91—93; *В. Сытенко* (Минск) 86, 91; *О. Тавчень* (Минск) 86, 91; *Э. Таджиларов* (Тбилиси) 86, 88; *А. Тартаковский* (Москва) 76а), 77—79, 80а), б), 82, 83, 84, 85а)—д); *К. Татаян* (Ереван) 76а), 78а), б), 79а), 80а), 86, 89, 90, 94а); *А. Татевосян* (с. Ншаван АрССР) 83; *И. Тилешов* (Алма-Ата) 83, 88б, в), 91; *С. Тихомиров* (Москва) 89, 91; *М. Торосян* (Ереван) 91; *В. Трофимов* (Москва) 76—79, 80а), в), 82, 83; *Ю. Трофимчук* (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) 89, 91; *И. Троянов* (Москва) 92; *О. Трушин* (Кострома) 91; *К. Туйтеев* (с. Ходжейли ККАССР) 91; *Г. Тюрин* (Курск) 83; *Д. Тэн-Чагай* (Алма-Ата) 91; *Р. Убайдуллаев* (Ташкент) 84, 88, 91, 93; *А. Удавихин* (Йошкар-Ола) 83, 86, 88б), в), 89, 91; *В. Уманский* (Баку) 86, 88б), в), д), 91, 94; *М. Фаддеев* (Ленинград) 76, 78б), 80а), в); *Н. Федин* (Омск) 78б), 83; *А. Филонов*; (Якутск) 91; *Б. Филь* (Львов) 83; *Г. Фирсова* (Ленинград) 76а), 78а), б), 80а), 83, 85а)—г), 88б), в), 89, 91, 93, 94а); *Харитонов* (Старая Русса) 78а, б); *С. Хосид* (Алма-Ата) 86, 88б), в), 91, 93; *Ю. Церковский* (Москва) 76б), 77, 78а), в); *З. Цихиставри* (Телави) 83; *П. Чеботарев* (Москва) 76, 78а), б), 80а), 86, 91; *Е. Чегирев* (п. Кадошкина МорАССР) 91; *И. Черная* (Ленинград) 91; *В. Шарафян* (Ереван) 91; *В. Шенкарь* (Киев) 78а),б); *А. Шихкеримов* (Сумгаит) 91; *В. Шматенко* (Ангарск) 83, 85а),в)—д), 88б), в), д), е), 89,91; *Д. Шулембаев* (Алма-Ата) 85а)—д); *Ф. Эрдман* (ГДР) 78б); *И. Эркенов* (Пенза) 78а), в), 91; *И. Якунин* (Ленинград) 91; *И. Яремко* (п. Долгое Закарпатской обл.) 91; *Н. Ярошенко* (с. Устивица Полтавской обл.) 88б, в), 91; *Н. Ясинская* (с. Мазуровка Винницкой обл.) 83.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф478—Ф492**, справились с задачами **Ф481**, **Ф483** и **Ф491**. Остальные задачи правильно решили: *М. Абдуллов* (Баку) 87; *К. Акопян* (Ереван) 79, 85; *А. Алексеев* (Гомель) 88; *М. Алексеев* (Обнинск) 80; *Н. Анисимов* (Раменское) 89, 90; *А. Антонян* (Ереван) 79; *А. Арутюнян* (Ленинакан) 78, 79; *А. Баргуев* (Улан-Удэ) 84; *А. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 78—80, 87, 88, 90, 92; *Г. Баскаков* (Южно-Сахалинск) 90; *В. Болотников* (Харьков) 79, 82; *Д. Василевич* (Ленинград) 79; *С. Веселянский* (Харьков) 79, 82; *А. Владимиров* (Ленинград) 86; *В. Гаврилов* (Орск) 80, 82; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) 78—80, 82; *В. Гаврилюк* (Староконстантинов) 90; *О. Ганболд* (Улан-Батор, МНР) 90; *В. Гаркавый* (Лида) 79, 80, 82, 88—90; *Ю. Гернер* (Ангарск) 92; *Ю. Горбунов* (Курск) 78—80; *О. Гребенчиков* (Уфа) 90; *С. Дереченник* (п/о Межиречье Гродненской обл.) 87, 90; *С. Дынник* (Тараклия) 90, 92; *А. Заболотских* (Чусовой) 87; *А. Забродин* (п. Черноголовка Московской обл.) 78—80, 84—90, 92; *Е. Иванов* (Долгопрудный) 78—80, 84, 86—90; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) 78, 79, 84, 86, 88, 89; *Я. Калейдзидис* (Чимкент) 82, 84, 86, 88—90; *А. Карнаухов* (п. Кутана ЯАССР) 78, 79; *И. Кевхишвили* (Тбилиси) 86, 87; *В. Кобелев* (Щигры) 79, 80, *В. Комов* (Александров) 80, 82, 85, 86, 89, 92; *А. Коробейников* (Балашов) 89; *И. Коротков* (Волгоград) 86, 89, 90; *Г. Корчемский* (Кишинев) 82, 85, 87; *В. Костур* (Киев) 88—90; *В. Костусян* (Запорожье) 85, 86, 89; *А. Краджян* (Ереван) 82, 89; *А. Куприн* (Москва) 82, 88; *Т. Кухтина* (Киев) 92; *Л. Кушнир* (Астрахань) 78, 82; *В. Лашкин* (Киев) 82, 86, 88, 90; *А. Левченко* (Свердловск) 79,

(Окончание см. на с. 91)

Новые книги

В этом номере мы публикуем краткие аннотации на выходящие в IV квартале книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям.

Математика

Издательство «Наука»

1. Кокстер Г. С. М., Грейтцер С. Л. *Новые встречи с геометрией.* Перевод с англ. Объем 13 л., тираж 50 000 экз., ц. 87 к.

Эта книга знакомит читателя с красивейшими результатами и методами геометрии, открытыми как в древности, так и в более позднее время. В ней содержатся и результаты, непосредственно примыкающие к школьному курсу геометрии (окружность девяти точек, теорема Чевы, геометрические преобразования), и идеи, приводящие к инверсивной и проективной геометриям.

Книга чрезвычайно удачно расширяет и дополняет школьную программу по геометрии. Поэтому «Новые встречи с геометрией» явится прекрасным пособием для работы школьных математических кружков, тем более, что после каждого раздела имеется большое количество задач.

Одну из глав этой книги мы публиковали в «Кванте» — см. «Квант», № 7, статью «Задача о трех кувшинах».

Простое и доступное изложение делает книгу интересной широкому кругу читателей, которые смогут, благодаря ей, познакомиться с красотой и богатством идей геометрии.

Издательство «Просвещение»

2. Виленкин Н. Я. *Функции в природе и технике.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., ц. 30 к.

В книге рассказывается о различных приложениях элементарных функций, изучаемых в школе, о развитии и применении дифференциального и интегрального исчислений, о том, как математики ищут оптимальные решения задач.

Книга будет полезна учащимся старших классов, желающим больше узнать об изучаемых в школе функциях.

Физика

Издательство «Наука»

1. Китайгородский А. И. *Физика для всех. Фотоны и ядра.* Объем 10 л., тираж 200 000 экз., ц. 38 к.

Книга задумана как заключительная часть «Физики для всех» Л. Д. Ландау и А. И. Китайгородского, неоднократно издававшейся в нашей стране и переведенной на многие языки мира. В книге изложены основные сведения, касающиеся электромагнитных волн, теплового излучения, учения о спектрах; приведены примеры наиболее распространенных лазеров; много внимания уделено ядерной физике. Отдельные разделы посвящены механике быстрых движений (специальная теория относительности) и движению малых частиц (волновая механика).

2. Шаскольская М. П. *Кристаллы.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., ц. 38 к.

3. Шаскольская М. П. *Очерки о свойствах кристаллов.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., ц. 38 к.

Эти книги представляют собой отдельные части полностью переработанного и расширенного издания книги «Кристаллы», издававшейся в 1944 и 1957 годах.

В первой книге рассказывается о росте кристаллов в природе — под землей, в глубинах морей, в пещерах, в минеральных месторождениях, в облаках — и о выращивании кристаллов в лабораториях. Во второй книге — о структуре кристаллов и о влиянии структуры на свойства кристаллов.

Простая и занимательная форма изложения делает книги доступными и интересными для многих читателей. Их с интересом прочтут школьники старших классов.

4. Тимофеев А. В. *Роботы и искусственный интеллект.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., ц. 38 к.

В книге рассматриваются различные функциональные схемы роботов и современное состояние проблемы моделирования интеллекта. Дается представление о принципах, алгоритмах и средствах очувствления и управления роботами. Особое внимание уделяется проблеме создания элементов интеллекта роботов. Обсуждаются вопросы применения роботов и систем искусственного интеллекта в промышленности, в космических и подводных исследованиях.

5. Казютинский В. В., Комаров В. И. *Взрывающаяся Вселенная.* Объем 16 л., тираж 50 000 экз., ц. 70 к.

В книге рассматриваются основные вехи революции в современной астрономической науке, те острые споры и дискуссии, которыми сопровождается рождение новых представлений о Вселенной, связанных с открытиями последних лет: активностью ядер галактик, квазарами, пульсарами, «черными дырами». Авторы делают попытку выяснить причины, которые приводят к тому, что в ряде случаев одним и тем же астрономическим фактам даются противоположные научные истолкования. Рассматривается также вопрос о том, какой вклад вносит новая картина Вселенной в научное мировоззрение.

Книга, написанная живо и интересно, рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся современной астрономией.

6. Лишевский В. П. *Популярная механика.* Объ-

ем 8 л., тираж 50 000 экз., ц. 30 к.

Книга посвящена теоретической механике. В ней на отдельных примерах в популярной и занимательной форме рассматриваются основные законы этой науки — теоретической базы всей техники.

7. Ирина В. Р., Новиков А. А. *В мире научной интуиции.* Объем 10 л., тираж 30 000 экз., ц. 65 к.

В книге рассматриваются процессы научного творчества, обусловленные действием интуиции. Удивительные, неожиданные, подчас трудно объяснимые возможности этой важной особенности человеческого разума раскрываются на конкретных примерах из области физики.

8. Смирнов Г. Д. *Управление космическими аппаратами.* Объем 10 л., тираж 25 000 экз., ц. 65 к.

Развитие ракетно-космической техники потребовало форсированной разработки методов, средств и систем управления космическими аппаратами различных типов. Об этой новой области техники и рассказывается в книге.

9. Филонович С. Р. *Лучи, волны, кванты.* Объем 10 л., тираж 30 000 экз., ц. 65 к.

Книга посвящена истории оптики — одного из наиболее развитых разделов современной физики. Показано влияние оптических исследований на развитие других областей физики (электродинамики, теории относительности, квантовой механики). Отражена история прикладной оптики, история создания оптических приборов.

Издательство «Мир»

10. Тригг Дж. Л. *Занимательные вехи в экспериментальной физике.* Перевод с англ. Объем 22 л., тираж 30 000 экз., ц. 1 р. 70 к.

История открытия сверхпроводимости и сверхтекучести, создание первого транзистора и первого лазера, основные эксперименты в области атомной и ядерной физики — таков вкратце круг вопросов, рассматриваемых известным американским ученым Джорджем Л. Триггом.

Популярная и одновременно строго научная форма изложения, богатый фактический и иллюстративный материал привлекут к книге внимание широкого круга читателей.

Издательство «Просвещение»

11. *Школьникам о современной физике. Физика сложных систем.* Составитель Угаров В. А. Объем 12 л., тираж 100 000 экз., ц. 57 к.

Предлагаемая книга предназначена школьникам старших классов, интересующимся физикой. Она поможет им углубить и расширить полученные в школе знания, даст много новых сведений из современной физики. В книге содержится девять рассказов на различные актуальные темы: «Фазовые переходы», «Квазичастицы и фотоны», «Излучение частиц, движущихся быстрее света» и др.

12. Ланге В. Н. *Физические парадоксы и софизмы.* Издание 3-е, переработанное. Объем 8 л., тираж 100 000 экз., ц. 25 к.

Книга содержит различные по тематике и степени трудности занимательные задачи, парадоксы, софизмы по всем разделам школьного курса физики. Все задачи имеют краткие решения.

13. Елисеев А. А. *Б. С. Якоби.* Объем 6 л., тираж 80 000 экз., ц. 20 к.

В книге рассказывается о жизни, научной и общественной деятельности выдающегося изобретателя, инженера и физика Б. С. Якоби.

«Атомиздат»

14. Шелест В. П. *Новый круг (структура элементарных частиц).* Объем 6 л., тираж 100 000 экз., ц. 30 к.

Уже много лет физики изучают мельчайшие частицы вещества, которые принято называть элементарными. Но оказывается, эти частицы совсем не элементарные, а очень сложные. В последние годы (в результате серии важных открытий экспериментаторов и работ теоретиков) стало ясно, что у этих частиц необычная структура, а разнообразие их намного больше, чем предполагалось.

И. Клумова,
М. Смолянский

Символический язык математики

В математике приходится иметь дело с различного рода утверждениями. Некоторые из них удается доказать (с помощью тех или иных рассуждений, опираясь на определенные исходные утверждения), другие — удается опровергнуть. В сущности, всякая математическая теория занимается доказательством или опровержением формулируемых в рамках этой теории утверждений.

Но как, собственно, устроены математические утверждения? Каковы те законы и правила, по которым мы рассуждаем — выводим одни утверждения из других? Этими вопросами занимается специальная математическая наука, называемая *математической логикой*. Знакомство с этой наукой — важное и увлекательное дело, помогающее проникнуть в дух современной математики.

Существует уже немало книг, посвященных изложению различных разделов математической логики. Среди них имеются книги, которые либо непосредственно адресованы, либо вполне доступны старшеклассникам. Остановимся коротко на двух таких книжках, вышедших в последние годы:

А. Д. Кутасов, *«Элементы математической логики»* (М., «Просвещение», 1977, 62 стр.).

С. Л. Эдельман, *«Математическая логика»*

(М., «Высшая школа», 1975, 170 стр.).

Первая из этих книг написана специально для учащихся 9—10 классов. В ней рассказывается о начальных понятиях математической логики, о ее символическом языке и его выразительных возможностях. Автор, опираясь на удачно подобранные примеры, весьма просто и доходчиво освещает такие вопросы, как *необходимые и достаточные условия*, *взаимно обратные* и *взаимно противоположные* утверждения. Значительное внимание уделяется так называемым *утверждениям общности*, объясняется, как такие утверждения доказываются с помощью *принципа математической индукции* и как они опровергаются *на контрпримерах*.

Читателя, несомненно, заинтересуют рассматриваемые в книге приложения символической логики, в частности — решение традиционных для популярной математики «логических» задач.

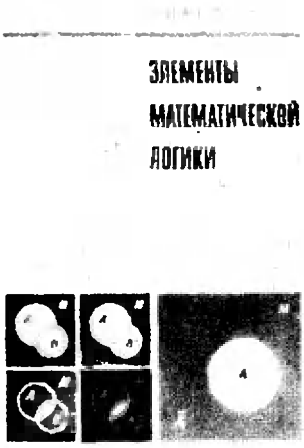
Вот одна из таких задач:

Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике», Джонс сказал, что это был черный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

Оказывается, ответ на этот вопрос можно попросту «вычислить». Как именно это сделать — подробно объясняется в книге.

Важным достоинством книги Кутасова являются помещенные в ней задачи. Часть из них разобрана, другие предназначены для самостоятельного решения и снабжены подробными указаниями и ответами.

Тогда как книга Кутасова посвящена почти исключительно структуре математических утверждений и написана совершенно элементарно, книга Эдельмана идет значительно дальше и потребует от читателя серьезных усилий (но не предварительных знаний). Здесь тоже — и притом более подробно — рассматривается язык, на котором формулируются математические утверждения, но сверх этого изучаются важнейшие понятия *логического следствия*, *вывода* и *доказательства*. Основное внимание уделено анализу и формальному описанию тех средств, с помощью которых из одних утверждений разрешается выводить другие.



Рассмотрим для примера такое незамысловатое рассуждение: *Всякий ромб является параллелограммом, фигура ABCD — ромб; значит, фигура ABCD — параллелограмм.* Из книги Эдельмана читатель узнает, что данное рассуждение получается как частный случай некоторой общей схемы рассуждений и что всякое математическое доказательство сводится, по существу, к последовательному использованию нескольких таких схем.

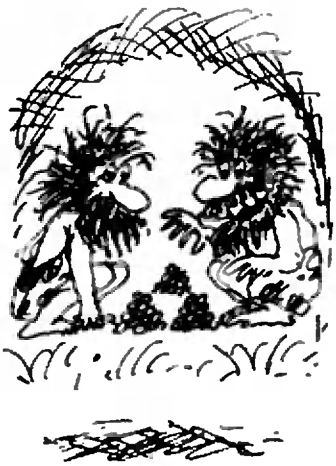
В книге Эдельмана более детально, чем в книге Кутасова, освещается вопрос о применении символического языка к конструированию так называемых *переключательных схем*. Рассматривается, например, задача об управлении мотором лифта при спуске с какого-нибудь этажа на первый. Приведение мотора в действие зависит от целого ряда условий (закрыты ли двери шахты на обоих этажах и двери кабины, находится ли пассажир в кабине, нажата ли кнопка спуска в кабине, нажата ли кнопка вызова на первом этаже). В книге составляется формула, учитывающая все эти условия, и строится соответствующая переключательная схема.

Терпеливый и вдумчивый школьник мог бы в принципе начать знакомство с математической логикой непосредственно по книге Эдельмана. Однако проще изучить сперва более элементарную и легко читаемую книгу Кутасова. Тем, кого заинтересует предмет, книгу Эдельмана можно рекомендовать как сравнительно доступное и вместе с тем достаточно основательное введение в «серьезную» математическую логику.

Конечно, рекомендуемые здесь книги нельзя признать совершенно безупречными. На наш взгляд, например, в книге Кутасова не всегда удачно продуманы обозначения, а в книге Эдельмана желательно было бы увеличить число упражнений (особенно в важной третьей главе). Надо полагать, авторы будут стараться улучшить свои пособия в следующих изданиях. В целом, однако, каждая из книг представляет собой доброкачественное, основанное на должном педагогическом опыте, введение в предмет.

Ф. Леонидов

IX праздник юных математиков в Батуми



С 4 по 9 ноября 1977 года в Батуми проходила очередная математическая конференция школьников. Эта конференция стала замечательной традицией. Кроме батумских школьников в ней приняли участие почти 150 школьников из Тбилиси, Сухуми и других городов Грузии, из Баку, Еревана, Киева, Москвы и Риги. На конференции было прочитано 28 докладов. Пять из них были отмечены специальными грамотами оргкомитета и жюри. Кроме этого еще десять докладов были отмечены как интересные.

Доклады были самые разные: в одних ребята рассказывали о собственных исследованиях, в других — о том, что они прочитали в книгах или в «Кванте». Обычно после доклада кто-нибудь из членов жюри выходил к доске, комментировал доклад, говорил о близких вопросах.

Некоторые доклады были посвящены не решенным до конца задачам. Например, в докладе А. Алексеева (Москва, 18-интернат) рассматривалась такая игра.

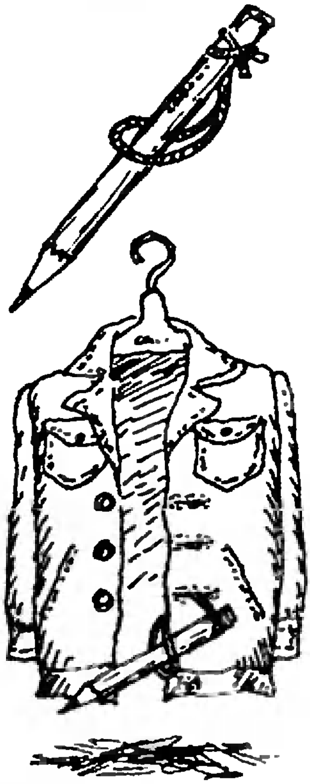
Играют двое. Они по очереди вписывают в таблицу 3×3 *числа от* 1 *до* 9 *(каждое число должно быть использовано). Когда таблица заполнена, подсчитывают две суммы: сумму* S_1 *произведений по столбцам и сумму* S_2 *произведений по строкам. Если* $S_1 > S_2$, *выигрывает начинавший игру, если* $S_1 < S_2$ *— выигрывает второй игрок.*

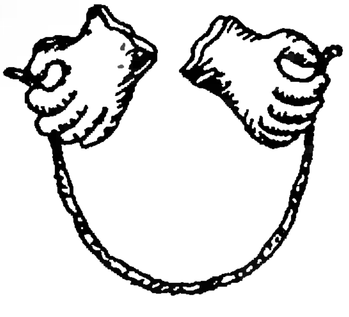
Докладчик исследовал игру с помощью электронной вычислительной машины и научил ЭВМ выигрывать. Однако он не сумел доказать, что найденная им стратегия приводит к победе всегда. Может быть, вам удастся придумать стратегию и доказать про нее, что она наверняка приводит к победе?

Чрезвычайно большой интерес вызвал у участников и многочисленных зрителей математический КВН. Первое место в нем заняла команда 19-й московской школы, второе — 208-й киевской школы и третье — команда 57-й московской школы. В конкурсе капитанов победил москвич Витя Гальперин (57 школа), победитель всесоюзных и международной олимпиад. Он сумел выиграть по олимпийской системе у остальных капитанов в такую игру:

Из трех куч камней за один ход можно либо взять несколько камней из одной кучи, либо равное число камней из двух куч. Играют двое. Выигрывает игрок, взявший последний камень.

Быстрее всех удалось ему и расцепить карандаш с веревкой и пиджак, не разрывая веревки и не ломая карандаша (см. рисунок). Попробуйте разобраться с этой головоломкой. Заодно попытайтесь, взяв за концы кусок бичевки и не выпуская их затем из рук, завязать на нем узел.





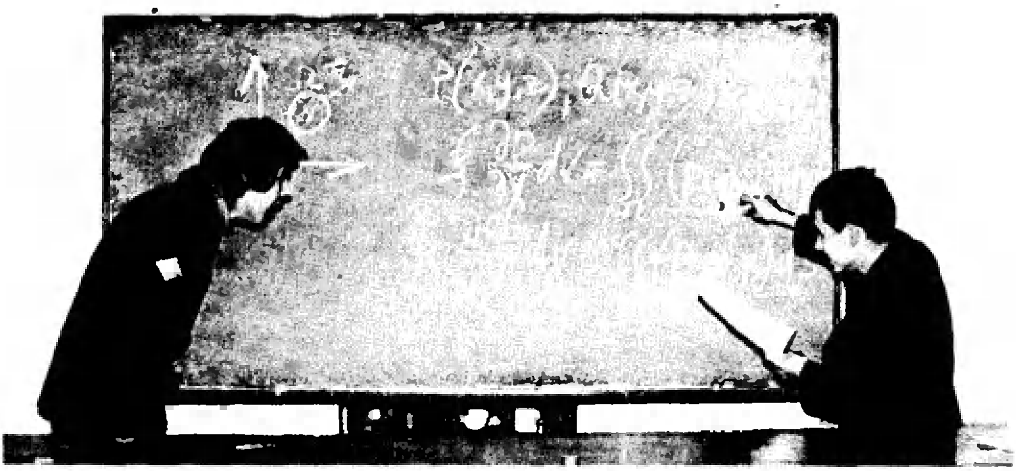
Приятно отметить, что конференция, в которой несколько лет назад принимали участие только школьники Закавказья, стала теперь практически всесоюзной. Это произошло благодаря энергии и энтузиазму Батумского горкома КПСС, Аджарского обкома и городского комитета ВЛКСМ, министерства просвещения Аджарской АССР, Совета профсоюза Аджарии, Аджарского отделения общества «Знание» и других республиканских и городских организаций и таких энтузиастов, как учитель математики батумской школы № 7 М. Жгенти.

Мы надеемся, что география батумского праздника математики в ближайшие годы еще более расширится. Хотелось бы, чтобы число городов, проводящих подобные конференции, тоже увеличилось.

Ждем ваших писем с рассказами о таких встречах школьников.

Л. Макаро■

LiKBaCaNaMgAL ZnFe SnPbH Cu 2Hg Ag Pt Au



Математика — будущему рабочему

Кем быть, чему посвятить свою жизнь, куда пойти учиться — с этими вопросами сталкивается каждый молодой человек на пороге самостоятельной жизни. Многие, решая эти вопросы, поступают после 8 класса в профессионально-технические училища, где вместе со средним образованием получают рабочую специальность. Например, в Ленинграде число учащихся в ПТУ уже сейчас превышает число учеников 9—10 классов. В современных ПТУ прекрасные кабинеты, лаборатории, читальные залы — одним словом все, что необходимо для получения полноценного общего образования. Конечно, кабинеты и оборудование — не самое главное. Сейчас много делается для того, чтобы хорошие традиции, накопленные нашей школой, перенести в ПТУ. «Квант» уже писал об олимпиадах по математике и физике для учащихся ПТУ, в течение трех лет организующихся в Ленинграде. Дважды команда учащихся профтехучилищ выступала на заключительном туре Всесоюзной математической олимпиады. В этом году большая группа выпускников ПТУ Ленинграда рекомендована к поступлению на дневные отделения вузов. Во многих училищах работают математические и физические кружки, проходят недели математики, перед ребятами выступают с лекциями научные сотрудники и преподаватели институтов.

Иногда задают вопрос — зачем будущему рабочему трудные математические понятия, задачи, кружки, олимпиады? Мы не будем пространно агитировать за занятия математикой. Просто хочется сказать о том громадном удовлетворении, которое получает человек, для которого математика становится другом и необходимым спутником. Таких людей среди учащихся ПТУ становится все больше и больше, и журнал «Квант» будет рад помочь им в общении с нашей древней и вечно молодой наукой.

В феврале этого года в Ленинграде состоялась, ставшая традиционной, IV физико-математическая олимпиада учащихся профтехучилищ; впервые была проведена олимпиада и по химии. Олимпиада проходила в два тура. В первом туре олимпиады участвовали почти все учащиеся 149 ПТУ города и области. Второй, заключительный тур, организацию которого в этом году взял на себя ЛЭТИ, собрал около 500 победителей первого тура. В течение четырех часов решали задачи, затем активно участвовали в разборе решений этих задач. Завершился этот день праздничным вечером в Доме культуры учащихся профтехобразования, где победителям были вручены дипломы, грамоты и многочисленные призы.

Ниже мы приводим тексты некоторых задач по математике Ленинградской олимпиады профтехучилищ.

I курс

1. Длины оснований равнобочной трапеции — 4 см и 8 см, а длина боковой стороны — 5 см. Какую сторону пересекает биссектриса угла при бо́льшем основании: меньшее основание или боковую сторону?

2. Сколько корней имеет уравнение $x^2 + ax + b = 0$, если известно, что $100 + 10a + b < 0$?

3. Дан куб с ребром 1. Доказать, что сумма расстояний от любой точки внутри куба до всех вершин не меньше $4\sqrt{3}$.

4. Стальную плитку размером 60 см × 85 см обвели карандашом на бумаге. Найдите центр полученного прямоугольника, имея лишь эту плитку и карандаш.

5. Дама сдавала в багаж рюкзак, чемодан, саквояж и корзину. Чемодан весит больше, чем рюкзак; саквояж и рюкзак вместе весят больше, чем две остальные вещи, а корзина и саквояж вместе весят столько же, сколько чемодан и рюкзак. Какая из вещей самая тяжелая, а какая самая легкая?

II курс

1. В окружности проведена хорда, стягивающая дугу в 120°. Можно ли провести через середину этой хорды другую хорду, делящуюся в точке пересечения хорд в отношении 1 : 4?

2. Существуют ли такие числа a и b, что область значений функции

$$y = a + b\sqrt{2}(\cos x + \sin x)$$

совпадает с отрезком $[-3; 15]$?

3. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB втрое меньше стороны AD. Сторона AD точками K и P разделена на три конгруэнтные части ($|AK| = |KP| = |PD|$). Найти тангенс суммы углов $\widehat{BPA}$ и $\widehat{BDA}$. Какой вывод можно сделать о сумме углов $\widehat{BKA}$, $\widehat{BPA}$ и $\widehat{BDA}$?

4. Доказать, что в любом шестизначном числе можно так переставить цифры, чтобы сумма первых трех цифр отличалась от суммы последних трех цифр меньше, чем на 10.

III курс

1. Сколько корней имеет уравнение

$$x^4 + x^3 = 10?$$

2. Человек стоит на заснеженном поле на расстоянии h от прямолинейного асфальтированного шоссе. Его скорость при движении по снегу вдвое меньше скорости на асфальте. Какое расстояние человек должен пробежать по снегу так, чтобы как можно быстрее добраться до некоторой (достаточно далеко расположенной) точки на шоссе?

3. Доказать, что при всех $x > 2$ выполнено неравенство: $5^x > 3^x + 4^x$.

4. Существует ли многогранник, имеющий 35 ребер?

М. Башмаков, Т. Братусь, С. Поздняков

(Начало см. на с. 84)

82, 86, 87, 90; *Д. Людмирский* (Киев) **79, 82, 84, 86—90, 92**; *Т. Макиенко* (Днепропетровск) **79, 90**; *С. Мартынов* (Белгород-Днестровский) **86**; *С. Медведев* (Москва) **79, 89, 90**; *В. Микулов* (Павлоград) **90**; *А. Мирлин* (Ленинград) **79**; *Н. Миронов* (Кашин) **88, 92**; *А. Михеев* (Пермь) **87—89**; *А. Мкртчян* (Ленинакан) **78, 79, 82**; *А. Могильнер* (Свердловск) **86, 90**; *И. Молчанов* (Киев) **78, 79, 90**; *Б. Наткович* (Тбилиси) **90**; *В. Невмержицкий* (с. Левковичи Житомирской обл.) **79, 86, 87, 90**; *Г. Нечаева* (Курск) **79, 90**; *А. Никитенков* (Великие Луки) **78—80, 82, 84—90, 92**; *В. Никитин* (Запорожье) **92**; *А. Оглоблин* (Иркутск) **90**; *А. Опарин* (Горький) **82, 86, 89, 90, 92**; *К. Оразов* (р/ц Кызыл-Атрек ТССР) **78, 84**; *В. Остапенко* (Алма-Ата) **78, 90**; *Т. Павелкина* (Киев) **90**; *В. Переверзев* (с. Лукьяновка Омской обл.) **86, 90**; *С. Пивницкий* (Внклини, ПНР) **90, 92**; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) **85—90, 92**; *А. Попов* (Чусовой) **82, 87**; *А. Родин* (Великие Луки) **88, 90**; *Л. Рожанский* (Москва) **84—88**; *И. Романов* (Москва) **85**; *А. Ряр* (Новосибирск) **87**; *Д. Самедов* (Масаллы) **90**; *Г. Сизых* (Ангарск) **92**; *В. Смышляев* (Ленинград) **84, 85, 88—90**; *С. Старков* (Белебей) **89, 92**; *А. Сторожев* (Актюбинск) **78**; *Р. Султанов* (Ташкент) **85, 87**; *В. Токарев* (Новосибирск) **90**; *О. Трушин* (Кострома) **89**; *Н. Федин* (Омск) **85, 88—90, 92**; *А. Фомин* (Новосибирск) **87, 90, 92**; *Ю. Хомяков* (Белорецк) **90**; *А. Чекмизов* (Краснодар) **90**; *В. Шанин* (Небит-Даг) **90**; *Д. Шафер* (Ленинград) **86—88**; *Н. Шестопал* (Киев) **85, 86, 89, 90, 92**; *И. Шляхова* (Лобня) **86, 89, 92**; *Ф. Эрдманн* (Цейтц, ГДР) **79**; *М. Эфроимский* (Ленинград) **92**; *Д. Юрьев* (Москва) **87**; *Ю. Янчук* (п/о Ивانополь Житомирской обл.) **80**.

Т. Уоолкер, А. Слек

Откуда взялся «он»?

Даже случайные свидетели профессионального разговора физиков могут заметить, что разговор пестрит словами, оканчивающимися на «он»: фотон, фонон, электрон, магнон и т. д.

Каково происхождение этих слов? Кто был их «изобретателем»? Кто ввел их в обиход?

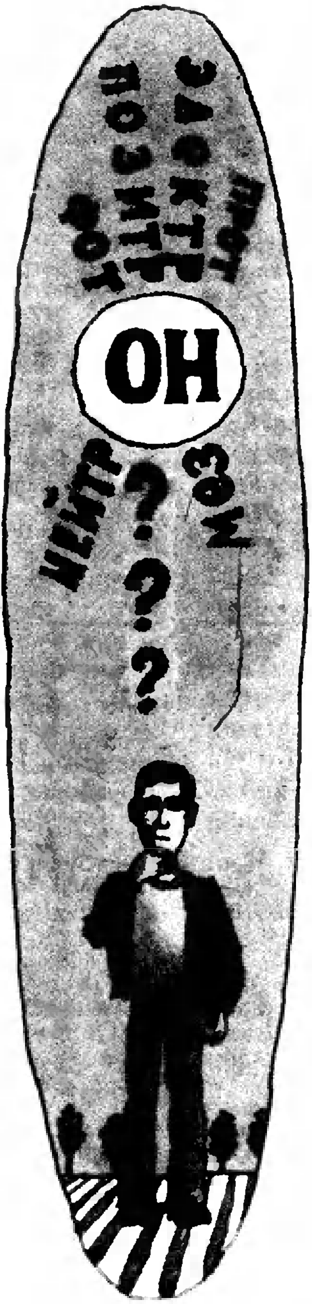
Термин «электрон» (для обозначения носителя электрического заряда) появился в 1891 году. Это слово происходит от греческого ηλεκτρον, что означает «янтарь».

В 1920 году появилось слово «протон», которое происходит от πρωτοσ, означающего «первый». Переход от «σ» к «ν» в конце слова был продиктован желанием согласовать новый термин со словом «электрон».

В 1921 году возникло название «нейтрон»: соединение слова «нейтральный» с окончанием в стиле электрона и протона.

В 30-е годы наблюдалось некоторое отступление от традиции в наименовании частиц — появились термины «мезотрон» и «позитрон». От первого названия физики впоследствии отказались, второе было сохранено. Для образования этих слов от «электрона» было отделено звукосочетание «трон», в качестве корней использовались греческое μεσορ («средний») и латинское positivus («положительный»).

Сочетание «трон» ныне определяется как суффикс, подчеркивающий принадлежность предмета к приборам (например, «циклотрон» и другие названия для ускорителей частиц). Оно ведет свою родословную, по-видимому, от старого шотландского слова tron, одно из значений которого — «прибор для взвешивания».



Термин «мезотрон» вскоре был заменен термином «мезон», и теперь «он» является традиционным суффиксом, служащим для всего спектра частиц в физике.

Проследим историю наименования некоторых частиц, фигурирующих в физике.

Электрон

Имя ирландского физика Георга Джонстона Стони не часто упоминается в современных работах по физике. Однако он еще в 1874 году постулировал, что должны существовать «определенные количества электричества», величину которых он определил из опытов по электролизу. В 1891 году Стони предложил название для этих частиц: «Автор обращал внимание на существование определенных количеств электричества в 1874 году... Эти заряды, которые удобно назвать электронами, не могут быть отделены от атома, они проявляются, когда атомы химически связываются».

Стони никак не мог показать, что электроны существуют на самом деле; скорее он продемонстрировал, что они должны существовать. Существование электрона, как частицы, оыло доказано Томсоном в 1897 году.

Нейтрон и протон

Нейтрон был открыт в 1932 году Дж. Чэдвиком.

Эта статья — сокращенный перевод работы американских авторов, опубликованной в Американском физическом журнале (American Journal of Phisics, 1970, т. 38). Перевод и подготовка к публикации В. Чернева.

Чэдвик указывает, что название открытой им частицы принадлежит Резерфорду, и цитирует лекцию Резерфорда, читанную в 1920 году в Королевском обществе в Лондоне. В этой лекции Резерфорд предсказывает существование некой нейтральной частицы, состоящей из тесно связанных ядра водорода и электрона. Однако он не использует названия «нейтрон». Ни одна из работ Резерфорда за 1920—1921 годы не содержит этого слова. Мы думаем, что название «нейтрон» было однажды предложено Резерфордом в лаборатории, и слово это прижилось, но в литературе оно появилось впервые в 1921 году.

Резерфорд также предложил слово «протон». Это произошло на собрании Британской ассоциации в 1920 году. Отчет об этом собрании гласит: «Показано, что элементы могут рассматриваться состоящими из водородных ядер или «протонов», как их назвал сэр Эрнест Резерфорд».

Фотон

Это слово используется для описания корпускулярных свойств электромагнитного поля. Автором такой концепции большинство физиков, вероятно, считает Эйнштейна. Многие книги по современной физике ссылаются на знаменитую статью Эйнштейна 1905 года о фотоэффекте, в которой он писал: «Согласно сделанному здесь предположению, энергия пучка света, вышедшего из некоторой точки, не распределяется непрерывно во все возрастающем пространстве, а складывается из конечного числа локализованных в пространстве неделимых квантов энергии, поглощаемых или возникающих только целиком».

Однако Эйнштейн не использовал термин «фотон» в своей статье. Он был введен в физику гораздо позднее, в 1926 году.

Но кем же именно введен этот термин?

Выпуск журнала «Nature» («Природа») от 18 декабря 1926 года содержит статью Льюиса «Сохранение фотонов», в которой это слово вводится впервые: «Я беру на себя смелость ввести для этого гипотетического нового атома, который не является светом, но играет существенную роль в любом процессе излучения, название «фотон».

Фонон

Квант энергии звуковых волн в кристалле, представление о котором ввел советский физик И. Е. Тамм, получил свое название по прямой аналогии с фотоном.

Кто же дал ему это название?

Оно было предложено советским физиком Я. И. Френкелем в книге «Волновая механика» (1932 г.): «Так же, как и в случае света и электронов, можно сопоставить звуковые волны с некоторого рода частицами, которые мы будем называть «фононами», и заменить изучение тепловых колебаний, образующих эти волны, изучением соответствующих фононов».

От редакции

Окончание «он» в названии элементарных частиц стало уже традицией. После «мезонов», «гиперонов» и других частиц, открытых в последнее время, эта традиция была перенесена на названия не самих частиц, а особых состояний частиц, взаимодействующих с излучением или другими частицами. Так появились «экситон», «поляроп», «магнон», «плазмон», «вакансион» и т. д.

Мы не будем здесь касаться этих «частиц», иначе нам пришлось бы рассказывать о всей современной физике, что невозможно.

Суммы и произведения

19. Преобразуйте $\sum\limits_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k (k+1)^2}{\left(C_{2n-1}^k\right)^2}$ двумя способами: по методу «туда — назад» и основываясь на соотношении

$$2n\, C_{2n-1}^k = (k+1)\, C_{2n}^{k+1}.$$

20—22. Получите соотношения между различными суммами вида $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k k^l \left(C_n^k\right)^2$ для $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, пользуясь методом «туда — назад» и соотношением $(n+1)\, C_n^k = (k+1)\, C_{n+1}^{k+1}$.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 9, с. 32)

1. Указание. Возьмем на координатной плоскости точки

$M_k (k; \sqrt{k})$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Тогда

$|M_{k-1}M_k| = \sqrt{2k - 2\sqrt{(k-1)\,k}}$,

а $|M_0M_n| = \sqrt{n(n+1)}$.

2. а) Нет (рассмотрите остаток от деления A на 9); б) 954; в) 2961, 3870, 5823, 7642, 9108 (других автор не знает); г) два 9 876 543 210 и 987 654 321; е) $N \geqslant 3$

3. Указание. Каждый член последовательности, начиная со второго, равен $S_n/(S_n - 1)$, где S_n — сумма (или произведение) всех предыдущих членов.

Когда существует предел?

1. Указание. На отрезках

$\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$ $(k \in Z)$ $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$.

Ответ. Не является.

2. Последовательность (x_n) — убывающая, поскольку $x_{n+1} - x_n < 0$.

3. Указание. $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

4. Указание. Докажите, что $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^m} \geqslant 1 + \frac{m}{2}$.

5. Ответ. 2.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 9)

1. Условия задачи сокращенно можно записать так:

1) $\alpha \to \beta$ (1) $+$ γ (4);
2) $\beta \to \gamma$ (3) $+$ α (2);
3) $\gamma \to \alpha$ (5) $+$ β (0)

(α, β и γ — буквы греческого алфавита: α — «альфа», β — «бета» и γ — «гамма»).

Из 1-го условия видно, что задачи «Беты» сложнее задач «Гаммы», ибо их решено меньше. Следовательно, по сложности задач $\beta > \gamma$ (значок $>$ в данном случае означает «сильнее»). Аналогично, из 2-го условия делаем вывод, что $\alpha > \gamma$, а из 3-го — что $\beta > \alpha$. Итак, по сложности составленных задач $\beta > \alpha > \gamma$. Следовательно, в первом конкурсе команда «Бета» получила 2 балла, а команда «Альфа» — 1 балл.

Сравнивая условия 1) и 2), видим, что «Альфа» решила больше задач «Гаммы», чем «Бета». Следовательно, по умению решать задачи $\alpha > \beta$. Сравнивая условия 2) и 3), делаем вывод, что $\gamma > \beta$, а сравнивая условия 1) и 3), получаем, что $\alpha > \gamma$. Итак, по умению решать задачи $\alpha > \gamma > \beta$; «Альфа» получила 2 балла, «Гамма» — 1 балл.

После двух конкурсов у «Альфы» 3 балла, у «Беты» — 2 балла и у «Гаммы» — 1 балл. Следовательно, на 1-м месте «Альфа», затем следуют «Бета» и «Гамма».

2. *Два решения: КОЛЯ = 1974 и КОЛЯ = 4827.*

3. Табличка 1 устроена так: $625 = 5^4$, $8 = 8^1$, $216 = 6^3$, поэтому недостающее число — это $49 = 7^2$.

В табличке 2 восемь чисел попарно равны: $\frac{1}{3} = 0{,}(3)$; $\frac{1}{8} = 0{,}125$; $3\frac{2}{7} = \frac{23}{7}$; $\frac{4}{11} = 0{,}(36)$, так что лишнее число — $\frac{4}{13}$.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор М. Медведская

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 1/VIII-78
Подписано в печать 14/IX-78
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 6.
Усл печ. л. 8,4 Уч -изд. л. 9,99 Т-16198
Цена 30 коп. Заказ 1704 Тираж 301250 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
г Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Анкета

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

- Для улучшения работы журнала и более полного удовлетворения ваших интересов редакция просит вас ответить на следующие вопросы.
- Ответы можно присылать на этой отрывной странице, а можно на отдельном листке бумаги (сохранив нумерацию вопросов).
- В части вопросов достаточно подчеркнуть ваш вариант ответа или написать «да» или «нет», в других желательно дать подробный ответ.
- Редакция будет вам очень признательна, если дополнительно к анкете вы (отдельно) напишите свое общее мнение о журнале, приведете примеры, когда он вам помог (и чем), укажете, что вас наиболее интересует в журнале, чем он еще мог бы вам помочь.
- Анкету просим высылать по адресу:

113035, МОСКВА М-35, Б. ОРДЫНКА 21/16, АНКЕТА «КВАНТА».

1. *Ваши фамилия, имя, отчество, возраст, место учебы (город, школа, класс) или работы (профессия, специальность), круг интересов (математика, физика)*
2. *Сколько лет вы читаете «Квант»?*
3. *Сколько человек читают ваши номера «Кванта»?*
4. *Материалы каких рубрик журнала вас больше всего интересуют и доступны для вас (подчеркните красным)? Какие не интересуют или не нравятся (подчеркните черным)?*
   Общие статьи; «Математический кружок»; «Математический практикум»; «Лаборатория «Кванта»; «Задачник «Кванта»; «Квант» для младших школьников»; «По страницам школьных учебников»; «Практикум абитуриента»; «Рецензии, библиография»; «Информация»; «Олимпиады»; «Уголок коллекционера»; «Смесь»; «Ответы, указания, решения».
5. *Назовите 2—3 лучшие статьи (за 1977—1978 годы) из разных рубрик журнала*
6. *Недавно в журнале появилась новая рубрика «По страницам школьных учебников». Доступны ли вам материалы этой рубрики?*
   Помогают ли они вам? На какие еще темы вы хотели бы видеть статьи под этой рубрикой?

7. В Задачнике «Кванта» уже опубликовано более 1000 задач по математике и физике. Понятны ли вам решения этих задач? ____________

Мы хотели бы получить ваши оценки этих задач по 7-балльной системе (1 — совсем плохая задача..., 7 — одна из лучших оригинальных задач). Пришлите нам (на отдельном листе) оценки тех задач, которые вам запомнились.

8. Нравится ли вам оформление журнала? ____________

Какие статьи оформлены по вашему мнению хорошо ____________

____

плохо ____________________________________

____

9. Статьи на какие темы вы хотели бы видеть в журнале в 1979 году?

Математика ________________________________

____

____

Физика ___________________________________

____

____

____

Дополнительные замечания ____________________

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

КОСМИЧЕСКАЯ «ЧАЙКА»

15 лет назад мир узнал имя первой женщины-космонавта. 16 июня 1963 года с космодрома Байконур стартовал космический корабль «Восток-6», пилотируемый Валентиной Владимировной Терешковой. Ее позывные были: «Я — чайка». Двумя днями раньше на корабле «Восток-5» в космос поднялся ее напарник Валерий Федорович Быковский. Полет Валентины Терешковой продолжался 71 час; за это время «Восток-6» совершил 48 оборотов вокруг Земли, пролетев в космосе около двух миллионов километров.

В результате этого полета была получена ценная медико-биологическая информация о поведении человека в сложных космических условиях, под влиянием перегрузок, вибрации и невесомости. Как и предполагали ученые, полет подтвердил, что организм женщины обладает большими резервами, позволяющими успешно преодолевать трудности, с которыми сопряжен полет человека в космос.

Полет еще продолжался, а советская почта уже выпустила в обращение марку с портретом Терешковой. В последующие годы вышло более тридцати марок, почтовых блоков и других советских филателистических материалов, посвященных этому событию. Более ста марок и почтовых блоков на эту же тему выпущено почтовыми ведомствами других стран.

Мы приводим здесь несколько марок СССР и социалистических стран, рассказывающих о подвиге Валентины Терешковой.

В. Рудов

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Этот рисунок составлен из четырех магических квадратов 5×5. Напоминаем, что магическим называется квадрат, у которого одинаковы суммы чисел, стоящих в строках, столбцах и диагоналях. Набор из четырех квадратов замечателен тем, что суммы чисел, стоящих в «одноименных» клетках этих квадратов, одинаковы.

Сумеете ли вы найти набор из трех магических квадратов с таким же свойством?

Е. Кривошеев